# Trigonometrie

**Unterrichtsinhalte und Beispiele**

Olaf Schimmel

# 1 Die Definition der Winkelfunktioen

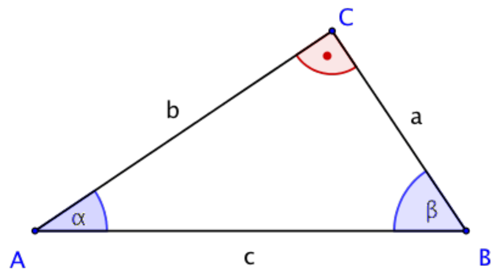
## 1.1 Die Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$ sowie der Hypotenuse $c = \overline{AB}$ In diesem sind die Winkelfunktionen folgendermaßen definiert.

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{a}{b}$$




Dabei werden die Festlegungen, welches die Gegenkathete und welches die Ankathete ist, stets von der Lage des Winkels aus getroffen, zu dem der Wert der Winkelfunktion bestimmt werden soll.

**Aufgabe:**
Stellen Sie die Winkelfunktionen zum Winkel $\beta$ auf und vergewissern Sie sich, dass

folgende Zusammenhänge gelten: $\sin\alpha = \cos\beta$ sowie $\tan\beta = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.

**Satz 1.1**

*Sei $\alpha$ ein beliebiger Winkel mit $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$. Dann gilt:*

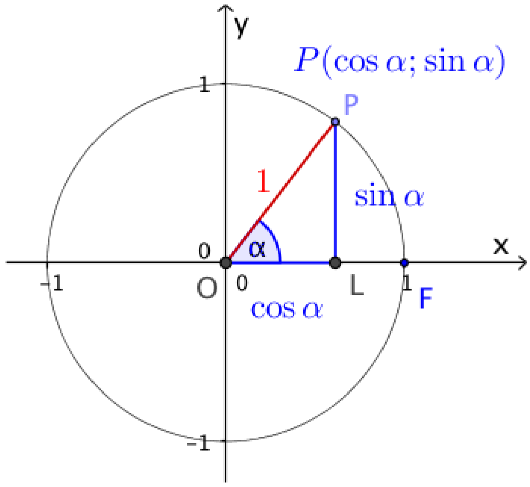
$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$$

In einem rechtwinkligen Dreieck reicht es aus, wenn neben dem rechten Winkel zwei weitere Stücke gegeben sind (außer zwei Winkel), um alle weiteren Stücke berechnen zu können. Sehr einfach ist auch der Radius R des Umkreises zu bestimmen, da die Hypotenuse stets auch ein Durchmesser des Umkreises ist. (Satz des Thales und seine Umkehrung)

## 1.2 Die Winkelfunktionen am Einheitskreis

In allgemeinen Dreiecken können auch stumpfe Winkel auftreten. Um nicht jedesmal die Rechnungen auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen zu müssen, sollten wir die Definition der Winkelfunktion verallgemeinern. Dies geschieht, indem wir einen Punkt P auf einem Einheitskreis betrachten, dessen Mittelpunkt im Ursprung eines Koordinatensystemes liegt. Fällt man von P aus das Lot auf die x-Achse, so erhält man stets ein rechtwinkliges Dreieck aus dem Ursprung O, dem Lotfußpunkt L und dem Punkt P. Man kann sich leicht überzeugen, dass im ersten Quadranten gilt: $y_P = \sin\alpha$ und $x_P = \cos\alpha$, da die Länge der Hypotenuse 1 ist. Dies soll nun auch für alle anderen Lagen von P gelten.

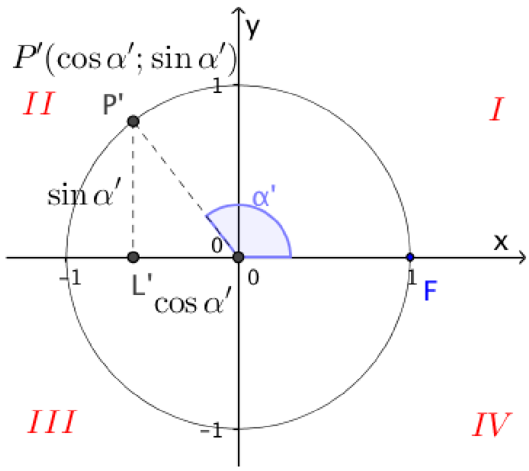



**Def 1.1**

*Sei P ein beliebiger Punkt auf einem Einheitskreis mit dem Mittelpunkt O(0; 0) und F der Schnittpunkt des Einheitskreises mit der positiven x-Achse. Dann gilt für die Koordinaten von P:*

$$x_P = \cos\alpha = \cos\sphericalangle FOP \qquad \wedge \qquad y_P = \sin\alpha = \sin\sphericalangle FOP$$

Wandert der Punkt P auf dem Kreis weiter, so sind auch stumpfe Winkel möglich, wenn P im zweiten Quadranten liegt. Wir erkennen, dass für diese Winkel $\alpha'$ der Sinuswert positiv und der Kosinuswert negativ ist.
Verfolgt man diese Überlegungen weiter, so sind im III. Quadranten die Werte beider Winkelfunktionen negativ, während im IV. Quadranten der Kosinus positiv und der Sinus negativ ist.
Für die Berechnung in Dreiecken interessieren wir uns nur für Winkel $\alpha$ mit $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

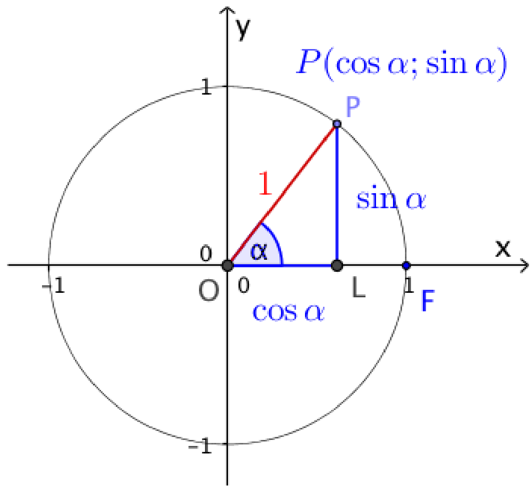



**Aufgaben:**

1. Man berechne für $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ in Abständen von 20° die Werte für Sinus und Kosinus und stelle sie übersichtlich dar.
2. Begründen Sie am Bild, dass gilt: $\sin 90° = 1$ und $\cos 90° = 0$.
3. Für welche Winkel $\alpha$ gilt $\sin\alpha = \cos\alpha$?

## 1.3 Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Wir beschränken uns hier auf Beziehungen, die uns bei Berechnungen in Dreiecken und bei der Ermittlung exakter Werte der Winkelfunktionen helfen können. Betrachten wir das Dreieck im Einheitskreis im nebenstehenden Bild. Zwei seiner Katheten werden dabei stets durch die Winkelfunktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ beschrieben, während die Hypotenuse dem Radius des Einheitskreises entspricht, also 1 LE beträgt. Folglich gilt bei Anwendung des Satzes des Pythagoras auf dieses Dreieck:




**Satz 1.2**

*Für jeden Winkel $\alpha$ gilt:* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Des Weiteren erhalten wir aus der Definition des Tangens: $\tan\alpha = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}$ in diesem Dreieck sofort die Beziehung:

**Satz 1.3**

*Für jeden Winkel $\alpha$ gilt:* $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

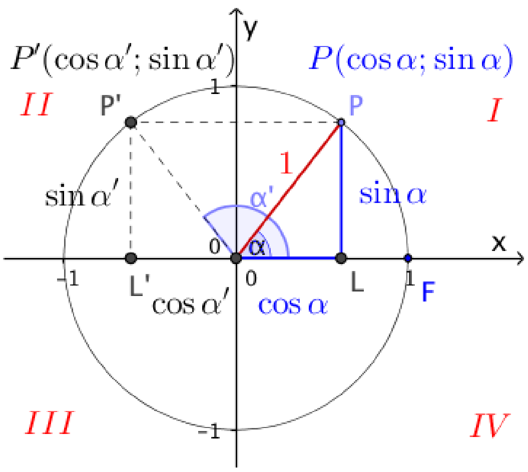
Liegen die Punkte P und P' wie in der Abbildung symmetrisch zur y-Achse, so haben die zugehörigen Winkel $\alpha$ und $\alpha'$ offensichtlich gleiche Werte der Sinusfunktion, also

$$\sin\alpha' = \sin\alpha$$

während für die Winkel die Beziehung

$$\alpha' = 180° - \alpha$$

gilt. Verknüpft man beides so erhält man direkt die Gleichung:




**Satz 1.4**

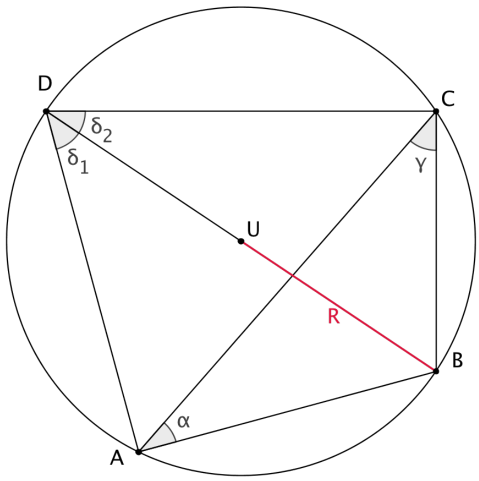
*Für jeden Winkel $\alpha$ gilt:* $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

Das hat Konsequenzen für die Dreiecksberechnung in allgemeinen Dreiecken. Zu ein und demselben Wert des Sinus existieren immer zwei mögliche Winkel.
Aus $\sin\alpha = 0,84$ erhält man beispielsweise: $\alpha_1 = 57,14°$ und $\alpha_2 = 122,86°$.

# 2 Berechnungen an Dreiecken

## 2.1 Der Sinussatz und der Umkreis

Wir beginnen mit einer Figur. In einen Kreis ist ein Sehnenviereck ABCD mit seinen Diagonalen einbeschrieben.
Dabei ist die Diagonale BD des Vierecks ein Durchmesser des Kreises.
Nach Satz des Thales sind deshalb die Dreiecke $\Delta ABD$ und $\Delta BCD$ rechtwinklige Dreiecke.
Deshalb gilt:




$$\sin\delta_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{2R}$$

$$\sin\delta_2 = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{2R}$$

Weiterhin gelten nach Peripheriewinkelsatz:
über der Sehne $\overline{BC}$: $\alpha = \delta_2$ und über der Sehne $\overline{AB}$: $\gamma = \delta_1$.

Nach Einsetzen in obige Gleichungen erhält man:

$$\sin\gamma = \frac{\overline{AB}}{2R}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{2R}$$

Stellt man nun die Gleichungen nach 2R um, und setzt beide gleich, so erhält man eine Beziehung, die man als **Sinussatz** bezeichnet:

**Satz 2.1**

*In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seiten $a$, $b$ und $c$ und den Winkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ sowie dem Umkreisradius $R$, gilt:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Zur Dreiecksberechnung kann die Einbeziehung des Umkreises vorteilhaft sein.

Beispiel 1: In einem Dreieck ABC gilt: $\alpha = 72^\circ$, $R = 3,6\ cm$ und $c = 6,1\ cm$. Berechnen Sie alle weiteren Winkel und Seiten des Dreiecks.

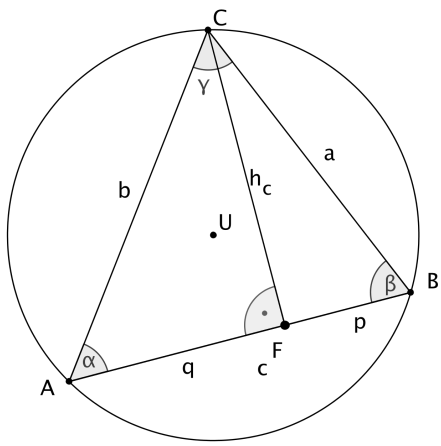
1. Sinussatz:
$$a = 2R \cdot \sin\alpha = 6,84\ cm$$
2. Sinussatz:
$$\sin\gamma = \frac{c}{2R} = 0,8472 \Rightarrow \gamma = 57,9^\circ$$
3. Innenwinkelsatz:
$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 50,1^\circ$$
4. Sinussatz:
$$b = 2R \cdot \sin\beta = 5,52\ cm$$

Beispiel 2: In einem Dreieck ABC sind die Winkel $\alpha = 48^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und die Seite $b = 4,5\ cm$ gegeben. Bestimmen Sie alle fehlenden Stücke. Ermitteln Sie zudem, welcher Anteil an der Umkreisfläche durch das Dreieck $\Delta ABC$ überdeckt wird.

1. Umkreisradius:
$$R = \frac{b}{2 \cdot sin\beta} = 2,6\ cm$$
2. Sinussatz:
$$a = 2R \cdot \sin\alpha = 3,9\ cm$$
3. Innenwinkelsatz:
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 72^\circ$$
4. Sinussatz:
$$c = 2R \cdot \sin\gamma = 4,9\ cm$$
5. Flächeninhalt $\Delta ABC$:
$$A_\Delta = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = 8,3\ cm^2$$
6. Flächeninhalt Umkreis:
$$A_U = \pi r^2 = 21,2\ cm^2$$
7. Anteil:
$$\frac{A_\Delta}{A_U} = \frac{8,3}{21,2} = 0,3897 \approx 39\%$$

## 2.2 Die Projektionssätze

Unsere Figur zur Herleitung ist ein Kreis mit einbeschriebenem Dreieck ABC. Eingezeichnet ist die Höhe $h_c$ mit dem Höhenfußpunkt F.
Die Dreiecke $\Delta AFC$ und $\Delta FBC$ sind rechtwinklige Dreiecke. Deshalb gilt:




$$\cos\alpha = \frac{q}{b} \quad \Rightarrow \quad q = b\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{p}{a} \quad \Rightarrow \quad p = a\cdot\cos\beta$$

Nun gilt aber zudem: $c = p + q$
Durch Einsetzen ergibt sich sofort:

$$c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$$

Damit ist einer der Projektionssätze gezeigt.

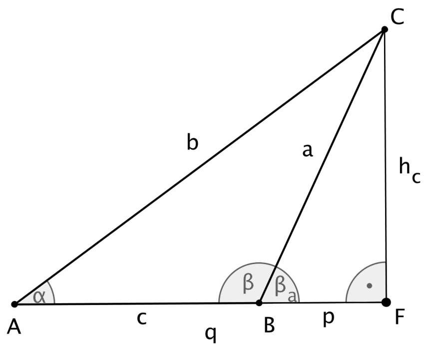
**Satz 2.2** ***Projektionssätze:***

*In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seiten a, b und c und den Winkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gilt:*

$$a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$$
$$b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$$
$$c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$$

Die anderen beiden Projektionssätze kann man auf analoge Weise herleiten, wenn man im Dreieck die Höhen $h_a$ oder $h_b$ benutzt. Außerdem gelten die Sätze auch für stumpfwinklige Dreiecke. Exemplarisch zeigen wir hier ebenfalls einen der drei Sätze.

Das Dreieck ABC ist nun stumpfwinklig. Eingezeichnet ist erneut die Höhe $h_c$ mit dem Höhenfußpunkt F, der diesmal außerhalb des Dreiecks auf der Verlängerung der Grundseite liegt.
Die Dreiecke $\Delta AFC$ und $\Delta BFC$ sind auch hier rechtwinklige Dreiecke. Deshalb gilt:




$$\cos\alpha = \frac{q}{b} \quad \Rightarrow \quad q = b\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\beta_a = \frac{p}{a} \quad \Rightarrow \quad p = a\cdot\cos\beta_a$$

Somit erhält man diesmal aus:

$$
\begin{aligned}
c &= q - p \\
c &= b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta_a
\end{aligned}
$$

Zwischen den Winkeln $\beta_a$ und $\beta$ gilt die Beziehung:

$$
\begin{aligned}
\beta_a &= 180^\circ - \beta \\
\cos\beta_a &= -\cos\beta
\end{aligned}
$$

Setzt man das oben ein, so erhält man den Projektionssatz:

$$c = b \cdot \cos\alpha + a \cdot \cos\beta$$

Analog könnte man wieder vorgehen, um die beiden anderen Projektionssätze herzuleiten.
Die Projektionssätze eignen sich insbesondere dann sehr gut, wenn zwei Winkel und die beiden gegenüberliegenden Seiten gegeben sind. Dann kann man sehr einfach die dritte Seite berechnen.

Beispiel: In einem Dreieck ABC gilt: $\alpha = 48^\circ$, $a = 5,2\ cm$ und $\gamma = 64^\circ$.
Berechnen Sie alle weiteren Winkel und Seiten des Dreiecks.

1. Sinussatz:
   $c = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = 6,3\ cm$
2. Projektionssatz:
   $b = a \cdot cos\gamma + c \cdot \cos\alpha = 6,5\ cm$
3. Innenwinkelsatz:
   $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 68^\circ$

**Bemerkung:**
Die Projektionssätze werden zur praktischen Dreiecksberechnung nur selten verwendet. Das liegt daran, dass sie durch den Sinussatz leicht ersetzbar sind. Im obigen Beispiel könnte man über die Innenwinkelsumme erst den dritten Winkel und anschließend mit dem Sinussatz die dritte Seite ausrechnen.
Die Sätze sind eher eine Zwischenstation, um zu einem weiteren wichtigen Satz zu gelangen, der zur praktischen Berechnung in Dreiecken viel häufiger Anwendung findet.

## 2.3 Der Kosinussatz

Wir wollen die Projektionssätze dazu benutzen, eine weitere wichtige Beziehung in allgemeinen Dreiecken, den Kosinussatz, herzuleiten. Dazu schreiben wir die Projektionssätze auf.

$$\begin{aligned} c &= a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha \\ b &= a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha \\ a &= b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta \end{aligned}$$

Nun multiplizieren wir jede der Gleichungen mit der Dreieckseite, nach der sie umgestellt ist. So erhalten wir die Quadrate der Seiten.

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot c \cdot \cos\beta + b \cdot c \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= a \cdot b \cdot \cos\gamma + b \cdot c \cdot \cos\alpha \\ a^2 &= a \cdot b \cdot \cos\gamma + a \cdot c \cdot \cos\beta \end{aligned}$$

Wir bilden die Summe der Quadrate der Seiten a und b und setzen die Gleichungen ein. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= a \cdot c \cdot \cos\beta + a \cdot b \cdot \cos\gamma + a \cdot b \cdot \cos\gamma + b \cdot c \cdot \cos\alpha \\ &= 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + b \cdot c \cdot \cos\alpha + a \cdot c \cdot \cos\beta \\ &= 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + c^2 \end{aligned}$$

Durch eine einfache Subtraktion des Terms: $2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ erhalten wir eine Gleichung des Kosinussatzes:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Die beiden anderen Gleichungen kann man in analoger Weise herleiten. Wir fassen zusammen.

**Satz 2.3** ***Kosinussatz***

*In jedem Dreieck $\Delta ABC$ mit den Seiten a, b und c und den Winkeln $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ gilt:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \end{aligned}$$

**Bemerkung:**
Der Kosinussatz wird gern auch als der verallgemeinerte Satz des Pythagoras bezeichnet. Für $\gamma = 90^\circ$ ergibt sich in der oben hergeleiteten Gleichung als Spezialfall tatsächlich der Satz des Pythagoras.
Der Kosinussatz ist besonders dann sinnvoll anwendbar, wenn von einem Dreieck:

- zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel oder
- drei Seiten

gegeben sind. Im zweiten Fall muss man allerdings die Gleichung noch nach dem Kosinus des Winkels umstellen, also beispielsweise zu:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Beispiel 1: In einem Dreieck ABC gilt: $\beta = 70°$, $c = 8,2\ cm$ und $w_\beta = 6,4\ cm$. Berechnen Sie alle weiteren Winkel und Seiten des Dreiecks.

1. Kosinussatz:

   $$b_1 = \sqrt{c^2 + w_\beta^2 - 2cw_\beta \cdot cos\frac{\beta}{2}} = 4,7\ cm$$

2. Sinussatz:
   $\sin\alpha = w_\beta \cdot \dfrac{\sin\frac{\beta}{2}}{b_1}$
   $\alpha = 51,1°$

3. Innenwinkelsatz:
   $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 58,9°$

4. Sinussatz:
   $a = \sin\alpha \cdot \dfrac{c}{\sin\gamma} = 7,5\ cm$

Beispiel 2: In einem Dreieck ABC gilt: a = 4,5 cm, b = 6,1 cm und c = 5,2 cm. Man berechne die Winkel.

1. größter Winkel (Kosinussatz umgestellt):

   $$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = 0,2154 \quad \Rightarrow \quad \beta = 77,6°$$

2. zweiter Winkel (Sinussatz):

   $$\sin\gamma = \frac{c}{b}\cdot\sin\beta = 0,8324 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 56,4°$$

3. dritter Winkel (Innenwinkelsumme):
   $\alpha = 180° - 77,6° - 56,4° = 46,0°$

**Bemerkung:**
Der größte Winkel wird deshalb zuerst berechnet, weil die beiden anderen Winkel dann in jedem Falle spitz sind und bei Anwendung des Sinussatzes eindeutig bestimmt sind.

**Aufgaben zur Dreiecksberechnung:**
Berechnen Sie jeweils alle nicht gegebenen Seiten und Winkel im (wie üblich bezeichneten) $\Delta ABC$, den Flächeninhalt und den Umkreisradius. Legen Sie zuvor eine Planfigur an. Begründen Sie, dass das Dreieck durch die gegebenen Stücke eindeutig bestimmt ist.

1. gegeben: $c = 8,0\ cm; s_c = 5,0\ cm; \beta = 50°$
2. gegeben: $w_\beta = 6,0\ cm; \beta = 44°; \alpha = 60°$
3. gegeben: $\beta = 70°; h_c = 4,8\ cm; b = 8,0\ cm$

## 2.4 Exakte Werte der Winkelfunktionen

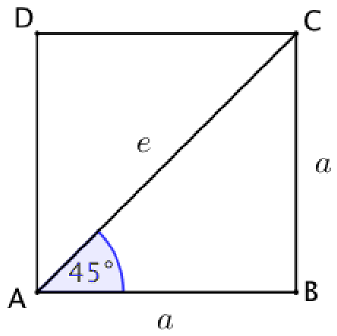
Für spezielle Winkel leiten wir nun exakte Werte der Winkelfunktionen her. Als uns bekannte Figuren, in denen spezielle Winkel auftreten, dienen insbesondere regelmäßige Vielecke. Die einfachsten sind das gleichseitige Dreieck und das Quadrat.

Unsere erste Figur zur Herleitung ist ein Quadrat mit einer Diagonalen. Hier haben wir einen Winkel von 45°.
Das Dreieck $\Delta ABC$ ist rechtwinklig und gleichschenklig und so folgt:

$$e^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{2} \cdot a$$

Nun stellen wir die Formel für $\sin 45°$ auf:

$$\sin 45° = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$




Im gleichseitigen Dreieck mit einer Höhe finden wir Winkel von 30° und 60°. Sofort ergibt sich:

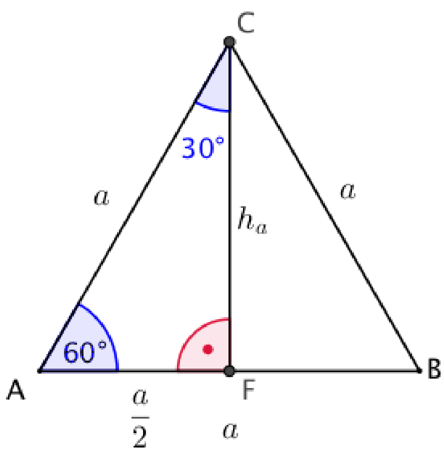
$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

Die Höhe $h_a$ beträgt:

$$h_a^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad h_a = \frac{1}{2}\sqrt{3}a$$

Daraus erhalten wir dann:

$$\sin 60° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}a}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$




Über die Beziehungen $\cos\alpha = (\sin 90° - \alpha)$ und $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ findet man Werte für die anderen Winkelfunktionen. Wir fassen zusammen:

| $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}=$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$ |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | n.d. |

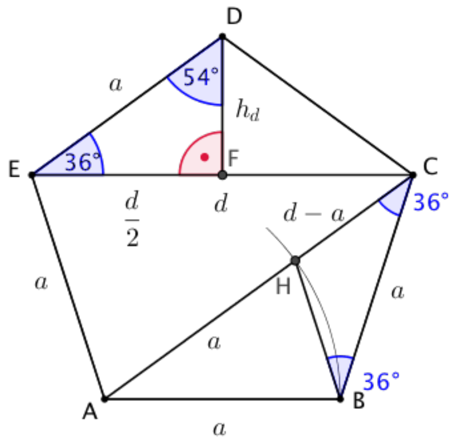
Man kann auch Winkelfunktionswerte für andere Winkel mit Hilfe geeigneter Figuren exakt berechnen, der Rechenaufwand wird jedoch erheblich größer.

Im regelmäßigen Fünfeck mit einer Höhe finden wir beispielsweise Winkel von $36°$ und $54°$. Da die Dreiecke $\Delta BCH$ und $\Delta ECD$ ähnlich sind, folgt zunächst:

$$\frac{d-a}{a}=\frac{a}{d}$$

Durch Umstellen nach d ergibt sich:

$$d=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$




Sofort folgt für den Winkel: $\sin 54° = \frac{\frac{d}{2}}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Über den Satz des Pythagoras, kann man $h_d$ berechnen:

$$h_d=\sqrt{a^2-\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4^2}a^2}=\frac{\sqrt{10-\sqrt{5}}}{4}a$$

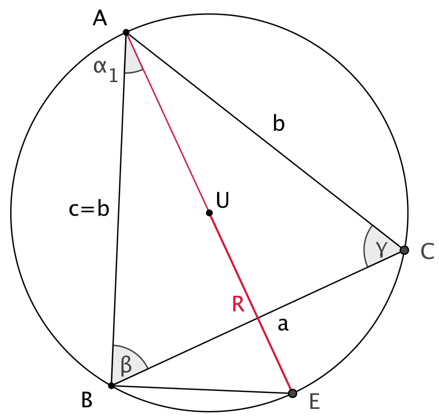
Also gilt dann

$$\sin 36°=\frac{h_d}{a}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

**Bemerkung:**
Wenn man Werte der Winkelfunktionen mit einem CAS im exakten Modus berechnet, erhält man für viele ganzzahlige Winkel solche Werte, die aus Wurzeltermen bestehen.

## 2.5 Winkelfunktionen für halbe und doppelte Winkel

Unsere Figur zur Herleitung ist ein Kreis mit einbeschriebenem, gleichschenkligen Dreieck ABC. Eingezeichnet ist außerdem die Symmetrieachse, die gleichzeitig den Durchmesser des Umkreises beschreibt.




Das Dreieck $\Delta ABE$ ist nach Satz des Thales ein rechtwinkliges Dreieck. Deshalb gilt:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2R} = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha$$

Durch Umformen und Quadrieren erhält man: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

Im gleichschenkligen Dreieck $\Delta ABC$ kann man auf den Winkel $\alpha$ bezogen den Kosinussatz anwenden und bekommt:

$$\cos\alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$$
$$\frac{a^2}{b^2} = 2\cdot(1-\cos\alpha)$$

Nach Gleichsetzen der beiden oben hergeleiteten Beziehungen folgt:

$$2\cdot(1-\cos\alpha) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Stellt man nun nach dem Kosinus des halben Winkels um folgt:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\alpha}{2\cdot(1-\cos\alpha)}$$

Nach Anwendung des triginometrischen Pythagoras und Kürzen des Terms $(1-\cos\alpha)$ entsteht:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Die hergeleitete Formel erlaubt es, aus dem Kosinus eines Winkels den Kosinus des halben Winkels exakt zu berechnen. Dies kann man zur Berechnung exakter Werte der Winkelfunktionen benutzen.

Weiterhin folgt mit dem trigonometrischen Pythagoras $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{2}{2} - \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also der folgende Satz:

**Satz 2.4**

*Sei $\alpha$ ein beliebiger Winkel. So gilt:*

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Beispiel: Berechnen Sie die exakten Werte der Winkelfunktionen für: $\alpha = 15^\circ$

1. $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
2. $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$
3. $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
4. $\tan 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3}} = 2 - \sqrt{3}$

Wenn man den halben Winkel berechnen kann, ist es auch möglich, Formeln für den Sinus und den Kosinus des doppelten Winkels zu entwickeln. Wir setzen an die Stelle von $\frac{\alpha}{2}$ die Bezeichnung $\alpha$, dann entsteht:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}$$

und umgestellt folgt:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

beziehungsweise nach Anwendung des trigonometrischen Pythagoras:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Für den Sinus des doppelten Winkels benutzen wir den trigonometrischen Pythagoras:

$$\begin{aligned}
\sin^2(2\alpha) &= 1 - \cos^2(2\alpha) \\
&= 1 - 4\cos^4\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 \\
&= 4\cos^2\alpha \cdot (1 - \cos^2\alpha) \\
&= 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

Schließlich ergibt sich für den Tangens des doppelten Winkels:

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha)} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}$$

Fassen wir unsere Formeln in einem Satz zusammen:

**Satz 2.5**

*Sei $\alpha$ ein beliebiger Winkel. So gilt:*

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

Beispiel: Berechnen Sie die exakten Werte der Winkelfunktionen Kosinus und Sinus für: $\alpha = 72°$

1. $\cos^2 36° = 1 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{16} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{16}$
2. $\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
3. $\cos 72° = 2 \cdot \cos^2 36° - 1 = \frac{-4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
4. $\sin 72° = \sqrt{1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

## 2.6 Flächenberechnungen im allgemeinen Dreieck

Im nebenstehenden Bild gehen wir zunächst von der allgemeinen Formel zur Flächenberechnung eines Dreiecks aus. Sie lautet für unser Dreieck:

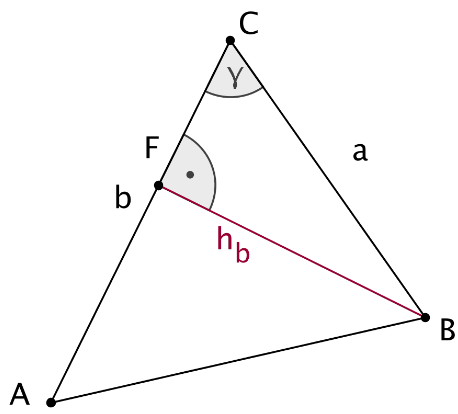
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

Mit

$$h_b = a \cdot \sin\gamma$$

erhalten wir sofort:

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \sin\gamma$$




**Satz 2.6**

*Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus zwei seiner Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.*

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

Eine weitere Formel ergibt sich ebenfalls sehr schnell, wenn wir uns an den Umkreisradius und den Sinussatz erinnern und die Beziehung

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

benutzen. Dann entsteht:

**Satz 2.7**

*Seien a,b,c die drei Seiten und R der Radius des Umkreises in einem Dreieck ABC. Dann gilt:*

$$A = \frac{abc}{4R}$$

Eine weitere Formel für den Flächeninhalt ist die HERONsche Flächenformel:

**Satz 2.8**

*Seien a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks und s der halbe Umfang. Dann gilt:*

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

**Beweis:**
Sei mit s der halbe Umfang eines Dreiecks bezeichnet, also:

$$2s = a + b + c$$

Da in den Gleichungen für den halben Winkel die Terme $1 + \cos\alpha$ und $1 - \cos\alpha$ vorkommen, benutzen wir außerdem den Kosinussatz für den Winkel $\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\begin{aligned}
1 - cos\alpha &= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} \\
&= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \\
&= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \\
&= \frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{2bc} \\
&= \frac{2(s-c)(s-b)}{bc}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\begin{aligned}
1 + cos\alpha &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{2bc} \\
&= \frac{2(s-a)\cdot 2s}{2bc} \\
&= \frac{2s(s-a)}{bc}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Mit Hilfe dieser vorbereiteten Terme berechnen wir nun den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. Ausgangspunkt ist die Flächenformel, in der der Sinus des Winkels $\alpha$ vorkommt.

$$A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Wir ersetzen $\sin \alpha$ entsprechend:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} bc \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= bc \cdot \sqrt{\frac{s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{(s(s-a)}{bc}} \\ A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Diese Gleichung heißt HERONsche Flächenformel.

## 2.7 Tipps und Tricks zur Dreiecksberechnung

Generell sollte man bei der trigonometrischen Berechnungen folgende Schritte durchführen:

1. Anlegen einer guten, beschrifteten Planfigur
   (nicht zu klein, muss nicht maßstabsgerecht sein, sollte aber in etwa den gegebenen Größenverhältnissen entsprechen)

2. Ergänzen der Planfigur durch geeignete Hilfslinien entsprechend der Aufgabenstellung.
   Solche Hilfslinien können Höhen, Seitenhalbierende oder Winkelhalbierende sein.
   Durch sie entstehen oft weitere Dreiecke, über die man einen Zugang zur Lösung erhalten kann.

3. Aufstellen und übersichtliches Aufschreiben von Gleichungen zur Figur
   Finde Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln, möglichst mit Bezug zu den gegebenen Stücken.

4. Berechnung gesuchter Stücke.
   Achten auf mögliche Mehrfachlösungen, insbesondere bei der Berechnung von Winkeln über den Sinussatz.

5. Achte auf einfache Lösungswege.
   Innenwinkelsumme für den dritten Winkel nutzen, wenn vorhanden, Gleichschenkligkeit oder Rechtwinkligkeit ausnutzen.

Beispiel 1: In einem Dreieck ABC gilt: $A = 24\ FE$, $a = 7,2\ LE$, $c = 9,6\ LE$
Untersuchen Sie, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist und berechnen Sie alle weiteren Winkel und Seiten der möglichen Dreiecke.

1. Flächenformel:

   $$A = \frac{1}{2}ac\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{2A}{ac} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 44,0^\circ \ \wedge \ \beta_2 = 136,0^\circ$$

2. Kosinussatz:
   $b_{1,2}{}^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta_{1,2} \quad \Rightarrow \quad b_1 = 6,7\ LE \ \wedge \ b_2 = 15,6\ LE$

3. Sinussatz:
   $\sin\alpha_{1,2} = \frac{\sin\beta_{1,2}}{b_{1,2}} \cdot a \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 48,5^\circ \ \wedge \ \alpha_2 = 18,7^\circ$

4. Innenwinkelsumme:
   $\gamma_{1,2} = 180^\circ - \alpha_{1,2} - \beta_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = 87,5^\circ \ \wedge \ \gamma_2 = 25,3^\circ$

Beispiel 2: In einem Dreieck ABC gilt: A = 14,4 FE, u = 30 LE und c = 8,6 LE. Man berechne alle fehlenden Stücke aller möglichen Dreiecke.

1. halber Umfang:
   $s = \frac{1}{2}u = 15$

2. Summe der Seiten a und b: :
   $a + b = u - c = 30 - 8,6 = 21,4 \quad \Rightarrow \quad b = 21,4 - a$

3. Seite a über Flächenformel:

   $$A = \sqrt{s(s-a)(s-(21,4-a))(s-c)} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 6,7 \ \wedge \ a_2 = 14,7$$

4. Seite b:
   $b_{1,2} = 21,7 - a_{1,2} \quad \Rightarrow \quad b_1 = 14,7 \ \wedge \ b_2 = 6.7$

5. Umkreisradius:
   $R = \frac{abc}{4A} = 14.7$

6. kleinster Winkel: $\sin\beta_2 = \sin\alpha_1 = \frac{6,7}{2R}$
   $\beta_1 = \alpha_2 = 13,2^\circ$

7. zweiter Winkel: $sin\gamma = \frac{8,6}{2R}$
   $\gamma = 17,0^\circ$

8. Innenwinkelsumme: $\beta_1 = \alpha_2 = 149,8^\circ$

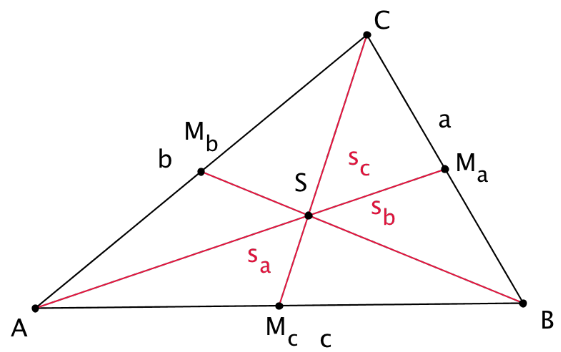
# 3 Besondere Linien und Punkte in Dreiecken

## 3.1 Seitenhalbierende und Schwerpunkt

**Def 3.1**

*Die Strecke, die vom Mittelpunkt einer Seite zum gegenüberliegenden Eckpunkt führt, heißt Seitenhalbierende.*

Im nebenstehenden Bild sehen wir ein Dreieck ABC mit seinen drei Seitenhalbierenden $s_a$, $s_b$, und $s_c$. $M_a$, $M_b$ und $M_c$ sind die Mittelpunkte der Seiten a, b und c.




**Satz 3.1**

*Jede Seitenhalbierende teilt das Dreieck ABC in zwei flächengleiche Teildreiecke.*

**Beweis:**
Wir betrachten: $\Delta AM_cC$ und $\Delta M_cBC$.
Beide Dreiecke haben gleiche Grundseiten, denn: $\overline{AM_c} = \overline{M_cB}$.
Beide Dreiecke haben gleiche Höhen, nämlich das Lot von C auf $\overline{AB}$.
Damit sind beide Dreiecke flächengleich. Zusammen ergeben Sie die Fläche von $\Delta ABC$
Folglich gilt: $A_{\Delta AM_cC} = A_{\Delta M_cBC} = \frac{1}{2} A_{\Delta ABC}$.

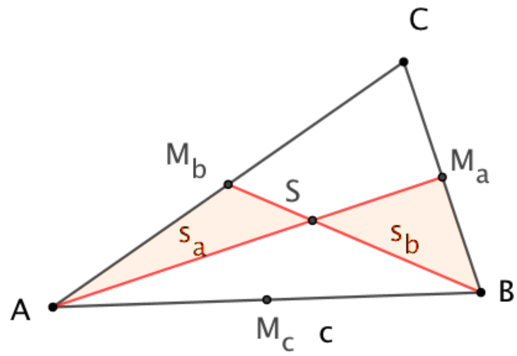
**Satz 3.2**

*Die drei Seitenhalbierenden schneiden sich in genau einem Punkt, dem* ***Schwerpunkt*** *des Dreiecks.*

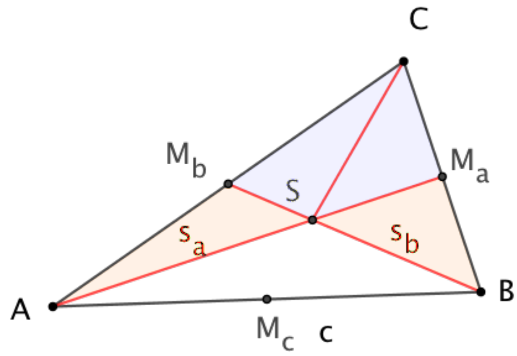
**Beweis:**
Wir betrachten zunächst die Seitenhalbierenden $s_a$ und $s_b$. Sie schneiden einander in

einem Punkt S.

Es entstehen die Figuren $\Delta ABS$, $\Delta BM_aS$ und $\Delta ASM_b$.
Die Dreiecke $\Delta ABM_a$ und $ABM_b$ sind flächengleich und entsprechen nach Satz 3.1 jeweils der Hälfte der Gesamtfläche. Sie überschneiden sich im Dreieck $\Delta ABS$
Folglich sind die Dreiecke $\Delta BM_aS$ und $\Delta ASM_b$ ebenfalls flächengleich.




Wir zeichnen die Strecke $\overline{SC}$.
Dann sind sowohl die Dreiecke $\Delta BM_aS$ und $\Delta M_aCS$, als auch $\Delta ASM_b$ mit $\Delta M_bSC$ flächengleich. Jeweils drei der vier untereinander gleichen Dreiecke machen die Hälfte der Fläche des Dreiecks ABC aus. Also beträgt die Fläche eines jeden von ihnen ein Sechstel der Gesamtfläche.




Zusammen sind das also zwei Drittel der Gesamtfläche.
Also verbleibt für das Dreieck ABS ein Drittel der Gesamtfläche.
Die Linie, die diese Fläche gerade halbiert, kann nur die Linie $\overline{M_cS}$ sein. Da aber $\overline{M_cC}$ die Seitenhalbierende von c ist, muss S auf $s_c$ liegen.

Wir erkennen weiterhin:
Alle sechs Teildreiecke $\Delta AM_cS$, $\Delta M_cBS$, $\Delta BM_aS$, $\Delta M_aCS$, $\Delta CM_bS$ und $\Delta M_bAS$ sind paarweise flächengleich.
Die Dreiecke $\Delta ABS$ und $\Delta ABC$ haben dieselben Grundseiten.
Da sich ihre Flächen wie 1: 3 verhalten, muss die Höhe Im Dreieck ABS ein Drittel der Höhe im Dreieck betragen.
Also gilt nach Strahlensatz auch: $\overline{M_cS} = \frac{1}{3}\overline{M_cC}$.

**Satz 3.3**

*Der Schwerpunkt teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.*

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{SM_a}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{SM_b}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SM_c}} = \frac{2}{1}$$

Diese Eigenschaft kann man nutzen, um mit Zirkel und Lineal eine Strecke in drei gleiche Teile zu teilen, ohne dass man einen Hilfsmaßstab zeichnet.

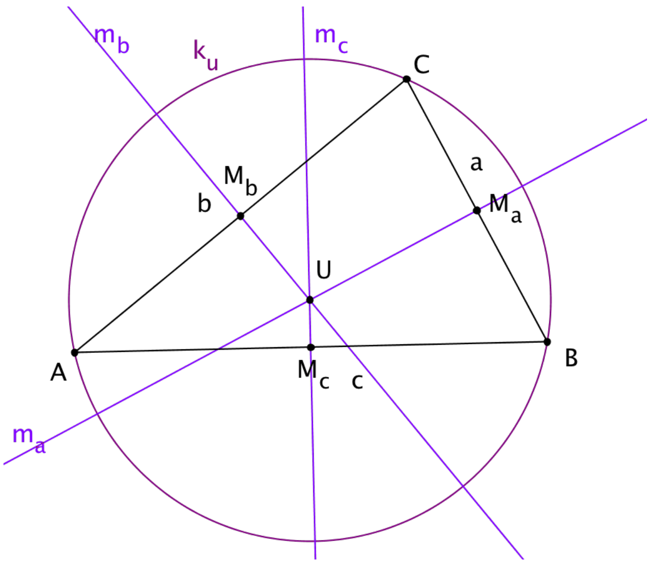
## 3.2 Mittelsenkrechte und Umkreis

Definition: Jede Gerade, die durch den Mittelpunkt einer Strecke $c = \overline{AB}$ geht und auf ihr senkrecht steht, heißt Mittelsenkrechte $m_c$.

Merke: Die Mittelsenkrechte hat folgende wichtige Eigenschaft:
Jeder Punkt P auf der Mittelsenkrechten ist stets gleich weit von den Endpunkten der Strecke entfernt.

$$P \in m_{AB} \Leftrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

Im nebenstehenden Bild sehen wir ein Dreieck ABC mit seinen drei Mittelsenkrechten $m_a$, $m_b$ und $m_c$. Die drei Mittelsenkrechten schneiden sich in genau einem Punkt, dem **Umkreismittelpunkt U** des Dreiecks.
$m_c$ enthält alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind. $m_b$ enthält also alle Punkte, die gleich weit von A und C entfernt liegen. Folglich muss der Schnittpunkt U gleich weit von A, B und C entfernt sein. Der Kreis um U durch A muss also auch durch B und durch C verlaufen.




**Satz 3.4**

*Die drei Mittelsenkrechten jedes Dreiecks ABC schneiden sich in genau einem Punkt U. U ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC.*

**Satz 3.5**

*Für ein beliebiges Dreieck ABC gilt:*

1. *Liegt U innerhalb des Dreiecks ABC, ist das Dreieck spitzwinklig.*
2. *Liegt U auf einer Seite des Dreiecks ABC, ist das Dreieck ABC rechtwinklig. (Satz des Thales)*
3. *Liegt U außerhalb des Dreiecks ABC ist das Dreieck ABC stumpfwinklig.*

## 3.3 Winkelhalbierende und Inkreis

### Def 3.2

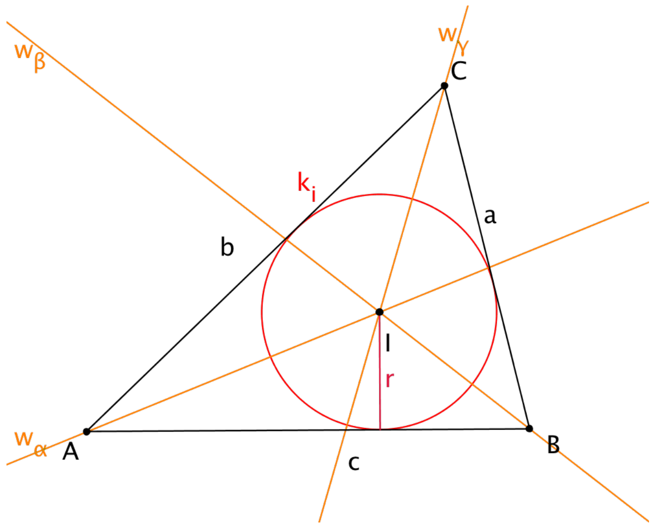
*Jede Gerade, die durch den Scheitelpunkt eines Winkels verläuft und den Winkel in zwei gleiche Teilwinkel zerlegt, heißt* ***Winkelhalbierende*** $w_c$.

### Satz 3.6

*Jeder Punkt $P$ auf der Winkelhalbierenden ist stets gleich weit von beiden Schenkeln des Winkels entfernt.*

$$P \in w_{ab} \Leftrightarrow Dist(P, a) = Dist(P, b)$$

Im nebenstehenden Bild sehen wir ein Dreieck ABC mit seinen drei Winkelhalbierenden $w_\alpha$, $w_\beta$ und $w_\gamma$. $w_\alpha$ enthält alle Punkte, die gleich weit von b und c entfernt sind. $w_\beta$ enthält alle Punkte, die gleich weit von a und c entfernt liegen. Folglich muss der Schnittpunkt I gleich weit von a, b und c entfernt sein.
Der Kreis um I, der a berührt, muss also auch b und c berühren.




### Satz 3.7

*Die drei Winkelhalbierenden jedes Dreiecks $ABC$ schneiden sich in genau einem Punkt $I$. $I$ ist der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks $ABC$.*

### Satz 3.8

*Für ein beliebiges Dreieck $ABC$ gilt:*

$$r = \frac{2abc}{R \cdot u} = \frac{ab \sin\gamma}{a + b + c}$$

**Beweis:**

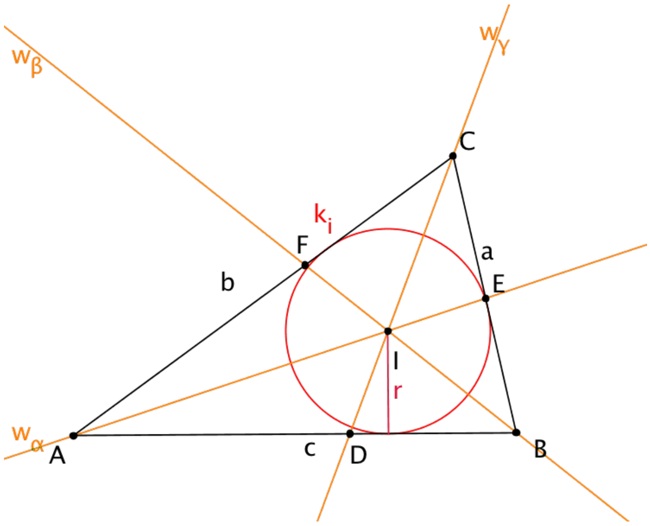
$$A = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{abc}{R}$$

$$\wedge \qquad A = \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r + \frac{1}{2} c \cdot r = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r$$

$$\Rightarrow \qquad r = \frac{2A}{(a + b + c)} = \frac{2abc}{R(a + b + c)} = \frac{ab \sin\gamma}{a + b + c}$$

**Satz 3.9**

*Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.*




$$\frac{c}{b} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}; \quad \frac{a}{c} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}; \quad \frac{b}{a} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$