Spiele und Strategien

Ein Skript für AMa

Olaf Schimmel

1 Grundlegendes zu Spieltheorie

Die klassische Spieltheorie ist eine junge Teildisziplin der Mathematik. Sie beschäftigt sich mit der mathematischen Erfassung und Behandlung von **Entscheidungssituationen** und ist damit eine **Theorie über soziale Interaktion**.
Sie ging aus der Theorie über Glücksspiele und der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervor. Als Begründer der Spieltheorie kann man Johann von Neumann sehen. Er veröffentlichte im Jahre 1944 das erste bedeutende Buch zu dieser Thematik.
Angewendet wird die Spieltheorie überall dort, wo Entscheidungen zu treffen sind und ihre Auswirkungen oder Folgen analysiert oder abgeschätzt werden müssen. Dies betrifft nicht nur den Bereich der klassischen Spiele, sondern auch das Versicherungswesen, die Sozialwissenschaften und dasFinanzwesen. Auch im Hintergrund der Politik liegen Anwendungsbereiche.

Def 1.1

Eine Entscheidungssituation, in der mehrere vernunftbegabte Wesen (Entscheider) Einfluss auf die Folgen (das Spielergebnis) haben und unterschiedliche Interessen verfolgen, heißen ***strategisches Spiel*** *bzw.* ***strategischer Konflikt****.*

In strategischen Spielen behandelt die Spieltheorie insbesondere die Frage:
Unter welchen Voraussetzungen ist welcher Spielverlauf bzw. welches Spielergebnis möglich?

Beispiel: Gefangenendilemma

Zwei Räuber werden beim Verkauf gestohlener Ware ertappt. Auf Hehlerei steht eine Strafe von einem Jahr Gefängnis. Auf Raub stehen 6 Jahre Gefängnis. Beide sind der Hehlerei überführt, nicht jedoch des Raubes. Nun wird jedem von beiden unabhängig folgendes Angebot gemacht: Bezichtigt er den anderen des Raubes und tritt als Kronzeuge auf, bekommt er ein Jahr seiner Strafe erlassen und der andere würde zusätzlich des Raubes überführt sein.

Welche Situationen sind möglich?
Um dies zu untersuchen, eignet sich eine tabellarische Erfassung der Situation. In die Tabelle werden jeweils in geordnete Paare die Haftstrafen für A und B eingetragen, die sich bei jeder Strategie ergeben.

		Räuber B Zeuge	kein Zeuge
Räuber A	Zeuge	$(6;6)$	$(0;7)$
	kein Zeuge	$(7;0)$	$(1;1)$

In der Tabelle erkennen wir, dass das in der Summe das Strafmaß am geringsten ist, wenn keiner den anderen beschuldigt. Beide wären nach einem Jahr wieder frei.
Jeder hat aber durchaus auch einen Anreiz als Zeuge aufzutreten, weil er dann ja die Chance hätte, sogar ohne Strafe davonzukommen. In dem Falle, wo genau einer den anderen beschuldigt, bekommt jedoch der andere die Höchststrafe.
Es besteht jedoch die Gefahr, dass jeder den anderen beschuldigt. In diesem Falle würden beide des Raubes beschuldigt sein und somit selbst mit einem Jahr Straferlass für 6 Jahre gefangen sein.

Bemerkungen:

1. Die Spieltheorie untersucht solche Situationen mit allen möglichen Ausgängen.

2. Die einfachsten derartigen Situationen kommen zustande, wenn es zwei Entscheider gibt, die jeweils nur zwei Entscheidungen treffen können. Dies führt zu den **Bi-Matrix-Spielen**.

3. In einer Bi-Matrix-Situation treten insgesamt vier Fälle auf.

2 Nim-Spiele

2.1 Nim-Spiele mit einem Stapel

2.1.1 Die Spielregeln

Def 2.1

*Spiele, in denen aus einer Anzahl von n Objekten (Karten, Hölzchen etc.) zwei Spieler abwechselnd nach bestimmten Regeln einige diese Objekte entfernen, heißen **Nim-Spiele**.*

Die einfachste Art von Nim-Spielen sind diejenigen, in denen die beiden Spieler abwechselnd zwischen einem und m Objekte aus nur einem Stapel entfernen dürfen.

Nim-Spiele mit einem Stapel (Spielregeln):

1. Auf einem Stapel liegen zu Beginn n Karten.
2. Abwechselnd führen A und B einen Spielzug aus. A beginnt.
3. Pro Zug müssen mindestens 1 aber höchstens m Karten entfernt werden. ($m < n$)
4. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten gültigen Zug ausführen kann.

Beispiel: A und B entfernen abwechselnd aus einem Stapel mit 10 Karten jeweils mindestens eine aber höchstens 3 Karten.
Geben Sie einen möglichen Spielverlauf an und benennen Sie den Sieger des Spiels.

Zug	Spieler	Anzahl	Stapel
			10
1	A	2	8
2	B	1	7
3	A	2	5
4	B	1	4
5	A	2	2
6	B	2	0

B gewinnt bei diesem Verlauf nach 6 Zügen.
Kann A so spielen, dass er den Sie erzwingen, also B nicht gewinnen kann? Wie muss A spielen, damit B nicht gewinnt?

2.1.2 Erarbeitung einer Gewinnstrategie

Def 2.2

Wir nennen eine Spielkonstellation, aus der heraus der Spieler, der am Zuge ist, den Sieg erzwingen kann, ***Gewinnsituation****. Analog heißt eine Spielkonstellation, aus der heraus der Gegner den Sieg erzwingen kann,* ***Verlustsituation****.*

Wir betrachten nun unser Beispiel und gehen dabei vom Spielende aus.

Liegen 1, 2 oder 3 Karten, kann der Spieler, der am Zug ist, diese entfernen und somit gewinnen. Also liegt eine Gewinnsituation vor.

Liegen 4 Karten, so kann man mit einem Zug nur auf eine der Kartenanzahlen 1, 2 oder 3 reduzieren. Damit kann aber der Gegner gewinnen. Folglich ist man selbst in einer Verlustsituation.

Liegen 5, 6 oder 7 Karten kann man in einem Zug den Stapel auf 4 Karten reduzieren und somit den Gegner in eine Verlustsituation bringen. Also ist man selbst in einer Gewinnsituation.

Bei 8 Karten, kann man den Stapel nur auf 5, 6 oder 7 Karten verringern und befindet sich selbst also in einer Verlustsituation.

Liegen 9 oder 10 Karten, so kann man den Stapel in einem Zug auf 8 reduzieren. Damit liegt für den Gegner eine Verlustsituation vor.

Fazit: A kann den Sieg erzwingen, wenn er so spielt, dass er dem Gegner immer eine Kartenanzahl überlässt, die ein Vielfaches von 4 ist.

Satz 2.1

In einem Nim-Spiel mit einem Stapel mit n Karten, bei dem man pro Zug eine Kartenanzahl k mit $1 \leqslant k \leqslant m$ entfernen muss, führen alle Vielfachen von $m + 1$ zum Verlust des Spiels. Ein Spieler kann den Sieg genau dann erzwingen, wenn er kein Vielfaches von m+1 vorfindet.

Beweis: In genau zwei Spielzügen kann man immer $m+1$ Karten entfernen, denn m + 1 lässt sich immer in genau zwei Summanden zerlegen, die zwischen 1 und m liegen.
Liegt ein Vielfaches von $m + 1$ Karten, kann Spieler 2 so spielen, dass wieder ein Vielfaches von $m + 1$ verbleibt und gewinnt.
Liegt kein Vielfaches von $m + 1$ kann Spieler 1 auf ein Vielfaches von $m + 1$ reduzieren und gewinnt.
□

2.1.3 Modifikationen und Erweiterung der Spieregeln

Es gibt zahlreiche Aufgaben zu abgewandelten Formen dieser Nim-Spiele. Hierbei werden häufig die Regeln für das Ziehen der Kartenanzahlen verändert oder es wird sogar mit mehreren Stapeln gearbeitet. Einige Beispiele.

Variante 1:
Aus dem Stapel von n Karten müssen mindestens k und dürfen höchstens m Karten entfernt werden. (Schreibweise: $N(k, m, n)$)

Beispiel: k = 3; m = 5; n = 10
Analyse:

$$\underbrace{0; 1; 2;}_{\text{Verlust}} \quad \underbrace{3; 4; 5; 6; 7;}_{\text{Gewinn}} \quad \underbrace{8; 9; 10}_{\text{Verlust}}$$

Wie man sieht, entstehen immer zusammenhängende Kartenanzahlen, die abwechselnd auf eine Verlust- bzw. Gewinnsituation führen. Zu den Verluststellungen gehören immer k Zahlen und zu den Gewinnsituationen immer m Zahlen. Vielfache von k+m sind immer Verlustsituationen.
Strategie:
Spiele so, dass Vielfache von k + m im Stapel für den Gegner verbleiben. Diese Zahlen führen zum Verlust des Spiels.

Variante 2:
Aus dem Stapel muss mindestens eine Karte oder die Hälfte der Karten oder die Hälfte des Vorgängers der Kartenanzahl entfernt werden.

Beispiel: n = 10
Analyse: Wir gehen vom Spielende aus.
1 Karte führt zum Gewinn des Spiels.
2 Karten führen zum Verlust des Spiels.
3 oder 4 Karten lassen sich auf 2 reduzieren. (Gewinn)
5 Karten kann man nur auf 4 oder 3 reduzieren. (Verlust)
6 Karten kann man auf 5 reduzieren. (Gewinn)
7 Karten muss man entweder auf 6 oder auf 4 reduzieren. (Verlust)
8 Karten kann man auf 7 verringern (Gewinn).
9 oder 10 Karten kann man auf 5 verringern. (Gewinn).
Die Spielweise ist hier unübersichtlicher, aber der Spieler der bei 10 Karten beginnt, kann so spielen, dass er immer in einer Gewinnsituation bleibt, also seinen Gegner immer in eine Verlustsituation bringt:
Er verringert auf 5, anschließend auf 2 und nimmt in seinem dritten Zug die letzte Karte weg.

Variante 3:
Es liegen zwei Stapel mit insgesamt n Karten. Ein Spielzug besteht darin, dass ein Stapel entfernt und der zweite Stapel in zwei neue Stapel aufgeteilt wird.

Beispiel 1: 15 Karten $(9; 6)$
Analyse: Wir gehen vom Spielende aus.
Die kleinste Konstellation ist (1; 1) sie lässt sich nicht weiter reduzieren.(Verlust)
Alle Konstellationen mit einer 2 lassen sich in (1;1) umwandeln. (Gewinn)
Die Konstellationen (1; 3) führt auf den Verlust.
reduzieren. (Verlust)
6 Karten kann man auf 5 reduzieren. (Gewinn)
7 Karten muss man entweder auf 6 oder auf 4 reduzieren. (Verlust)
8 Karten kann man auf 7 verringern (Gewinn).
9 oder 10 Karten kann man auf 5 verringern. (Gewinn).
Die Spielweise ist hier unübersichtlicher, aber der Spieler der bei 10 Karten beginnt, kann so spielen, dass er immer in einer Gewinnsituation bleibt, also seinen Gegner immer in eine Verlustsituation bringt:
Er verringert auf 5, anschließend auf 2 und nimmt in seinem dritten Zug die letzte Karte weg.

Aufgaben:

1. Gegeben ist ein Skatblatt mit allen 32 Karten. Die Spieler A und B vereinbaren folgendes Spiel. Abwechselnd nehmen beide Spieler Skatkarten weg. A schlägt eine Kartenzahl a (a $<$ 32) vor, die man mindestens wegnehmen muss. B schlägt eine Kartenzahl b (b $>$ a; b $<$ 32) vor, die man pro Zug mindestens wegnehmen muss. A beginnt. Gewonnen hat der Spieler, der den letzten gültigen Zug machen kann.
   a) Wer gewinnt bei a = 3 und b = 7, wenn beide optimal spielen?
   b) Wer gewinnt bei a = 3 und b = 4? Geben Sie einen Spielverlauf an, in dem beide optimal spielen.
   c) Spieler A schlägt a = 5 vor. Welche Zahlen könnte B vorschlagen, damit er den Sieg erzwingen kann?

2. Die Spieler A und B spielen folgendes Spiel. Abwechselnd zeichnen beide in ein n-Eck (($n \geqslant 5$) Diagonalen ein. A beginnt. Ein Zug ist nur gültig, wenn die eingezeichnete Diagonale keine andere bereits eingezeichnete Diagonale in einem inneren Punkt schneidet. Verloren hat derjenige Spieler, der keine gültige Diagonale mehr einzeichnen kann.
   a) Untersuchen Sie für n = 5; 6; 7 und 8, ob einer der Spieler den Sieg erzwingen kann. Wie muss er dazu spielen?
   b) Geben Sie eine Strategie an, wie man spielen muss, um den Sieg zu erzwingen.

2.2 Das klassische Nim-Spiel

2.2.1 Die Spielregeln

Das klassische Nim-Spiel ist schon sehr alt und geht in seiner klassischen Variante auf Charles Bouton zurück, der 1901 seine Erkenntnisse zu diesem Spiel veröffentlichte und damit die kombinatorische Spieltheorie begründete. Es ist auch einer der ersten Computerspiele, die es gab. Im Jahre 1951 gab es auf der Industrieausstellung in Berlin (West) einen elektronischen Rechner Nimrod, gegen den man in diesem Spiel antreten konnte. Angeblich hat der damalige deutsche Wirtschaftsminister Ludwig Erhard damals gegen Nimrod verloren, was den ehemaligen Bundeskanzler Konrad Adenauer köstlich amüsierte.

Ausgangssituation:

- Es gibt 3 Stapel mit x, y und z Hölzchen: $(x; y; z)$
- Es gilt: $x \geqslant 1;\ y \geqslant 1 \wedge z \geqslant 1$

Regeln:

1. A und B ziehen abwechselnd.
2. A beginnt.
3. Man darf nur von einem Haufen Hölzchen wegnehmen.
4. Man darf alle, muss aber mindestens ein Hölzchen wegnehmen.
5. Der Spieler, der den letzten gültigen Zug machen kann, hat gewonnen.

Bemerkungen:

- Das Spiel ist noch nicht beendet, wenn nur noch zwei oder nur noch ein Stapel Hölzchen enthält, denn nach obigen Regeln sind noch Züge möglich. Folglich besteht der letzte Zug immer darin, vom letzuten Stapel alle Hölzchen zu entfernen, so dass danach auf keinem Stapel mehr ein Hölzchen liegt.
- Wir vereinbaren für die Schreibweise, dass ein ein 3-Tupel $(x; y; z)$ die Zahlen auf den drei Stapeln beschreibt.
- Um die Züge tabellarisch darzustellen, stellen wir die 3-Tupel vor und nach dem Zug dar. Daraus ist ersichtlich, von welchem Stapel Hölzchen bzw. Karten entnommen wurden.
- Um sich mit dem Spiel vertraut zu machen, sollte man einige Spiele mit wenigen Hölzchen oder Karten einmal spielen.

2.2.2 Gewinn- und Verluststellungen

Wir betrachten zunächst ganz einfache Situationen, die gegen Spielende auftreten können. Sicher ist die Stellung $(0;0;k)$ eine Gewinnsituation für den Spieler, da er in einem Zug alle k Objekte vom einzigen Stapel entfernen kann.
Dagegen ist $(0;1;1)$ eine Verlustsituation, denn daraus kann man lediglich $(0;0;1)$ erzeugen und damit für den Gegner eine Gewinnsituation schaffen.
Damit ist jede Situation, aus der man die Konstellation $(0;1;1)$ herstellen kann eine Gewinnsituation.

Lemma 1: Die Stellung $(k;1;1)$ ist für $k > 0$ stets eine Gewinnsituation.

Beweis: 1. Zug: $(k;1;1) \to (0;1;1)$
Gegner: $(0;1;1) \to (0;0;1)$
2. Zug: $(0;0;1) \to (0;0;0)$ (Sieg)

Lemma 2: Die Stellung $(m;k;k)$ ist für $k > 0$ stets eine Gewinnsituation.

Beweis: 1. Zug: $(m;k;k) \to (0;k;k)$
Die folgenden Züge bestehen darin immer genau das auf dem anderen Stapel nachzumachen, was der Gegner auf einem der Stapel macht. So stellt man sicher, dass man immer den letzten Zug selbst hat.

Man sollte also niemals Gleichheit auf zwei Stapeln erzeugen, da der Gegner dann nach Lemma 2 den Sieg erzwingen kann.

Lemma 3: Die Stellung $(1;2;3)$ ist stets eine Verlustsituation.

Beweis: Man kann entweder zwei Stapel zurücklassen, aus denen der Gegner in einem Zug entweder die Situation $(0;2;2)$. oder $(0;1;1)$ herstellen kann. Damit ist sein Sieg gesichert.
Wenn man drei Stapel zurücklässt, dann gibt es aber immer zwei gleiche Stapel und damit befindet sich der Gegner nach Lemma 2 in einer Gewinnsituation.

Alle Konstellationen, aus denen heraus man mit einem Zug die Stellung $(1;2;3)$ herstellen kann, sind folglich Gewinnstellungen. Für $k \geqslant 3$ gilt also:

Lemma 4: Die Stellungen $(1;2;k)$, $(1;k;3)$ und $(k;2;3)$ sind Gewinnsituationen.

Durch Weiterführung dieser Überlegungen findet man weitere Verlustsituationen.

Lemma 5: Die Stellungen $(1;4;5)$; $(1;6;7)$; $(2;5;7)$ und $(3;4;6)$ sind Verlustsituationen.

2.2.3 Gewinnstrategie

Um eine Gewinnstrategie zu erarbeiten, sollte man nach Gemeinsamkeiten in den Verlustsituationen suchen, denn hiervon gibt es offensichtlich weniger. Was haben alle diese Stellungen gemeinsam? Bouton entdeckte diese Gemeinsamkeit, als er die Zahlen auf den drei Haufen ins Dualsystem übertrug und ihre duale Summe ohne Übertrag bildete.

Beispiele: $(1;2;3)$

$$\begin{array}{rcrrrr} 1 & & & 0 & 0 & 1 \\ 2 & & & 0 & 1 & 0 \\ 3 & + & & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$(1;4;5)$

$$\begin{array}{rcrrrr} 1 & & & 0 & 0 & 1 \\ 4 & & & 1 & 0 & 0 \\ 5 & + & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$(1;6;7)$

$$\begin{array}{rcrrrr} 1 & & & 0 & 0 & 1 \\ 6 & & & 1 & 1 & 0 \\ 7 & + & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$(2;5;7)$

$$\begin{array}{rcrrrr} 2 & & & 0 & 1 & 0 \\ 5 & & & 1 & 0 & 1 \\ 7 & + & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$(3;8;11)$

$$\begin{array}{rcrrrr} 3 & & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & + & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Satz 2.2

In einem klassischen Nim-Spiel mit drei Stapeln, liegt genau dann eine Verlustsituation vor, wenn die duale Summe der drei Anzahlen ohne Übertrag eine Nullsumme ist.

Satz 2.3

Im klassischen Nim-Spiel lässt sich aus einer Gewinnsituation stets in einem Zug eine Verlustsituation erzeugen. Aus einer Verlustsituation ergibt sich bei jedem Zug eine Gewinnsituation.

Begründung: Eine Verlustsituation liefert die Nullsumme 0. An jeder Stelle entsteht also durch die Addition aus den drei Ziffern die Ziffer 0. Dies ist nur durch drei Nullen oder durch genau zwei Einsen möglich, wobei an mindestens einer Stelle zwei Einsen vorkommen müssen. Es darf aber nur die Zahl eines Stapels verändert werden, wobei entweder irgendwo mindestens eine 1 hinzukommt oder wegfällt. Damit ist das Ergebnis keinesfalls eine Nullsumme und es liegt nach dem Zug eine Gewinnsituation vor.
Wenn eine Verlustsituation vorliegt, ergibt die duale Addition ohne Übertrag keine Nullsumme, sondern eine Dualzahl z. z ist in jedem Falle kleiner als mindestens eine der Zahlen, da ohne Übertrag addiert wird. Von einem Stapel nehme man genau so viele Hölzchen weg, dass z verschwindet. Man erhält folglich eine Nullsumme.

Beispiel: $(5;9;11)$

$$
\begin{array}{lcccccc}
5 & & & & 1 & 0 & 1 \\
9 & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
11 & & + & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$(2;9;11)$

$$
\begin{array}{lcccccc}
2 & & & & & 1 & 0 \\
9 & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
11 & & + & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

$(2;9;1)$

$$
\begin{array}{lcccccc}
2 & & & & & 1 & 0 \\
9 & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & & + & & & & 1 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$(2;3;1)$

$$
\begin{array}{lcccccc}
2 & & & & & 1 & 0 \\
3 & & & & & 1 & 1 \\
1 & & + & & & & 1 \\
\hline
 & & & & & 0 & 0
\end{array}
$$

Wir haben nun die Stellung $(2;3;1)$ erreicht, von der wir bereits wissen, dass eine Verluststellung vorliegt.

Um das Nim-Spiel erfolgreich zu spielen, sollte man also immer wieder Nullsummen erzeugen und kann somit den Sieg erzwingen. Die duale Berechnung im Hintergrund ist jedoch recht schwierig und zeitaufwändig.

Aufgaben:

1. Zeigen Sie durch Betrachtung aller möglichen Varianten oder Zurückführung auf $(1;2;3)$, dass die Konstellation $(1;4;5)$ eine Verluststellung ist.

2. Untersuchen Sie, welche der folgenden Konstellationen Gewinn- und welche Verluststellungen sind.

   a) $(3;5;7)$
   b) $(11;17;1)$
   c) $(15;17;23)$
   d) $(24;24;12)$
   e) $(93;15;76)$
   f) $(2017;2018;2019)$

3. Untersuchen Sie, ob es einen Wert k so gibt, dass eine Verluststellung vorliegt.

   a) $(4;k;11)$
   b) $(29;k;5)$
   c) $(k;6;13)$
   d) $(k;k;18)$
   e) $(33;k;35)$
   f) $(k;k^2;3)$

4. Entscheiden und begründen Sie, welcher Wahrheitswert wahr oder falsch vorliegt.

   a) Ist die Gesamtsumme der Hölzchen ungerade, so liegt stets eine Gewinnsituation vor.
   b) Wenn eine Verlustsituation vorliegt muss die Summe aller Hölzchen gerade sein.
   c) Wenn die Summe der Hölzchen eine Zweierpotenz ist, liegt immer eine Verlustsituation vor.
   d) Wenn die Hölzchenzahlen drei positive aufeinanderfolgende Zahlen sind, so liegt immer eine Verlustsituation vor.

5. Geben Sie einen Spielzug an, der aus der jeweils vorliegenden Situation eine Verlustkonstellation herstellt. Benutzen Sie die duale Schreibweise zur Ermittlung des Spielzuges.

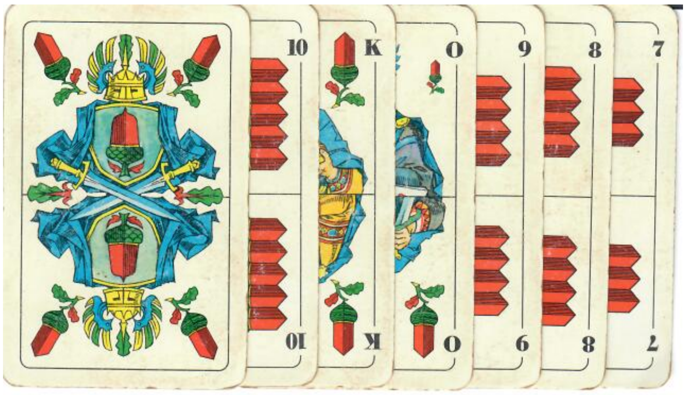
   a) $(4;7;14)$
   b) $(29;13;43)$
   c) $(25;16;13)$
   d) $(5;101;18)$
   e) $(33;34;35)$
   f) $(140;302;219)$

6. A und B wollen das Original-Nim-Spiel spielen und haben genau 20 Hölzchen. A darf die Hölzchen auf die drei Stapel verteilen (jeweils mindestens ein Hölzchen) B darf entscheiden, wer den ersten Zug ausführt. Entscheiden und begründen Sie, welcher Spieler im Vorteil ist. Geben Sie vier Ausgangsstellungen an, in denen A verliert, wenn A beginnt.

3 Skat

3.1 Das Skatblatt und die Werte der Karten

Das Skatblatt besteht aus 32 Spielkarten, die sich in vier Farben aufgliedern. Es gibt das deutsche und das französische Blatt. Das in unserer Region übliche deutsche Blatt (Skatstadt Altenburg) hat jeweils 8 Karten in den Farben Schellen, Herz, Blatt und Eicheln. Das erste Bild zeigt die Farbkarten in der Farbe mit dem höchsten Farbwert Eicheln.

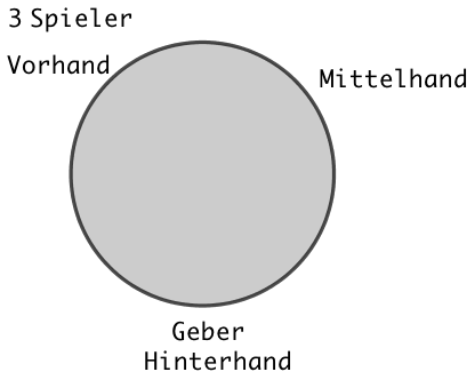


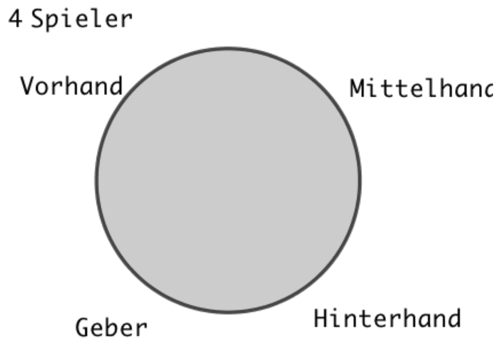
Die Karte mit dem höchsten Wert ist das Daus (11 Augen), gefolgt von der Zehn (10 Augen). Danach folgen der König (4) und der Ober (3). Die 3 Karten 7, 8 und 9 haben keine Augen. dennoch ist im Spiel die neun höher als die 8 und diese höher als die 7. Es fehlt der Unter, der zwei Augen hat. Pro Farbe erhält man also 30 Augen und insgesamt 120 Augen. Ein Spieler, der das Spiel führt (Einzelspieler) muss 61 Augen erzielen. um das Spiel zu gewinnen. (Ausnahmen: Nullspiele und Ramsch).

Die Unter spielen eine besondere Rolle. Lediglich in **Nullspielen** zählen sie als Farbkarten. Ansonsten ist er immer eine Trumpfkarte. Die vier Unter ordnen sich genau nach den Werten der Farben. Der Eichelunter ist der höchste, gefolgt vom grünen Unter, dem Herzunter und dem Unter in der Farbe Schellen.

3.2 Kartenausgabe und Ablauf des Reizens

Der Geber teilt nach gründlichem Mischen der Karten im Uhrzeigersinn, beginnend bei dem Spieler zu seiner Linken **(Vorhand)** aus. Zunächst erhält jeder der drei Spieler drei Karten. Die nächsten zwei Karten werden verdeckt in die Mitte gelegt. Das ist der **Skat**. Anschließend erhält jeder Spieler vier Karten und in der letzten Runde noch einmal drei Karten.





Nach der Regel: **Geben - Hören - Sagen - Weitersagen** erfolgt nun das Reizen. Das heißt, dass **Mittelhand** mit dem Reizen beginnt und Vorhand stufenweise immer sagt, ob er bei dem genannten Reizwert mitgeht oder nicht. Wenn zwischen diesen beiden das Reizen beendet ist, also einer übrig ist, prüft der Geber bzw. **Hinterhand**, ob er noch höher reizen möchte. Er muss in diesem Falle „weitersagen“, also seine Reizwerte wieder stufenweise dem Spieler anbieten, der noch im Rennen ist. Das Reizen ist beendet, wenn der Spieler ermittelt ist, der den höchsten Reizwert angeboten hat. Dieser bekommt das Spiel und darf nun den Skat aufnehmen, wenn er nicht auf ein Handspiel gereizt hat.

3.3 Spielmöglichkeiten und Spielwerte

Wie hoch kann man aber Reizen? Wie ermittelt man für seine Karten den Reizwert?
Ausschlaggebend hierfür sind die Unter, die man im Blatt hat und die Farbe, die man gern spielen möchte.
Die Werte der Farben sind: Schellen 9; Herz 10; Blatt: 11 und Eicheln: 12. Außerdem gibt es noch ein besonderes Spiel, das Grandspiel mit dem Wert 24. Hier sind nur die Unter Trumpf. Bei den Farbspielen sind neben den vier Untern, die auch hier die vier höchsten Trumpfkarten sind, die Karten der gewählten Farbe ebenfalls Trumpf. Es gibt also genau 11 Trumpfkarten in einem Farbspiel.

Die folgende Tabelle zeigt die Berechnung des Reizwertes.

Unter im Blatt	Wert	Regel
Eicheln und nicht Blatt	mit 1	mit 1 spiel 2, also $2 \cdot Farbwert$
Eicheln, Blatt und nicht Herz	mit 2	mit 2 spiel 3, also $3 \cdot Farbwert$
Eicheln, Blatt, Herz, kein Schellen	mit 3	mit 3 spiel 4, also $4 \cdot Farbwert$
alle vier Unter	mit 4	mit 4 spiel 5, also $5 \cdot Farbwert$
höchster Unter ist Blatt	ohne 1	ohne 1 spiel 2; also $2 \cdot Farbwert$
höchster Unter ist Herz	ohne 2	ohne 2 spiel 3; also $3 \cdot Farbwert$
höchster Unter ist Schellen	ohne 3	ohne 3 spiel 4; also $4 \cdot Farbwert$
kein Unter	ohne 4	ohne 4 spiel 5; also $5 \cdot Farbwert$

Beispiel 1:

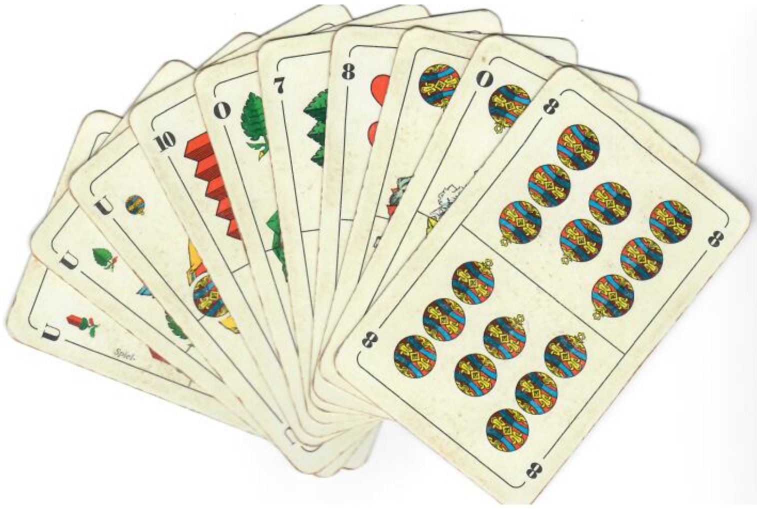
In Frage käme ein Schellenspiel ohne einen. Es ist ein Spiel, das auf den niedrigsten Reizwert führt:
ohne 1, spiel 2: $2 \cdot 9 = 18$

Dieses Spiel ist jedoch nicht vielversprechend. Man hat nur 5 Trumpfkarten und auch die anderen Karten sind nicht so hoch, dass man mit ihnen viele Stichen bekommen kann.

Beispiel 2:

Man spielt ohne 2.
Grün: ohne 2, spiel 3: $3 \cdot 11 = 33$
Schellen: ohne 2 spiel 3 $3 \cdot 9 = 27$

Beispiel 3:

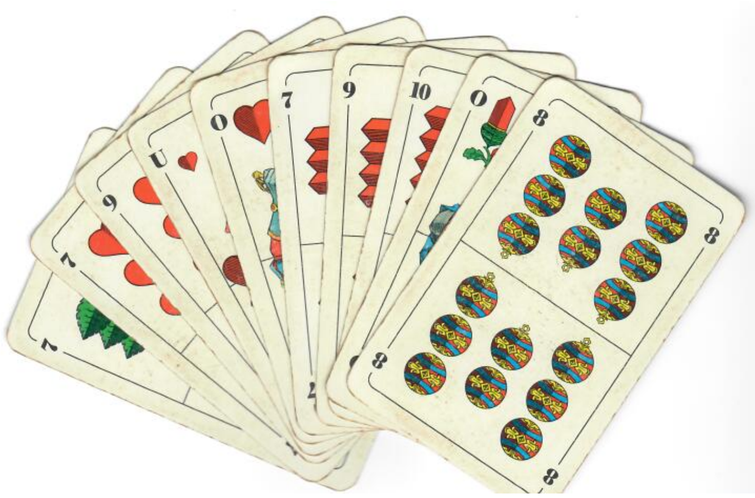


Man spielt mit Zweien.
Schellen: mit 2, spiel 3: $3 \cdot 9 = 27$
Grün: mit 2, spiel 3: $3 \cdot 11 = 33$
Grand: mit 2, spiel 3: $3 \cdot 24 = 72$

Grundsätzlich gilt:
Es besteht keine Reizpflicht. Man muss nicht bis zum Höchstwert reizen. Wenn man seine Karten nicht vielversprechend findet, kann man beim Reizen aufgeben und überlässt das Spiel einem Mitspieler. Wenn alle drei Spieler keine 18 anbieten, wird entweder ein **Ramschspiel** gespielt oder eingemischt. Das wird vor Spielbeginn vereinbart.

Es gibt noch eine weitere Sorte von Spielen, bei denen es keine Trumpfkarten gibt und die Unter sich vor dem Ober und die Zehn sich nach der Neun einreiht. Die Reihenfolge ist dann 7; 8; 9; 10; U; O; K; D. Diese Spiele heißen **Nullspiele**. Der Spieler, der ein Nullspiel spielt, darf im Spiel keinen einzigen Stich bekommen. Wenn seine Gegner es schaffen, dass er einen Stich „mitnehmen“ muss, hat er verloren. Auch dann, wenn der Stich keine Augen hat, also aus drei Luschen besteht.
Der Reizwert für ein einfaches Nullspiel beträgt 23.

Beispiel 4:



Mit diesen Karten ist das Nullspiel vielversprechend. Es gibt eine einzige „Schwachstelle“. Das ist die 8 in Schellen.
einfaches Nullspiel: Reizwert: 23
Null-Hand (d.h. ohne Aufnehmen des Skat's): Reizwert: 35
Null-ouvert (d.h. Spieler spielt mit offenen Karten): Reizwert 46
Null-ouvert-Hand: Reizwert: 59

Bemerkungen:
Nullspiele sind meist schwieriger zu spielen als andere Spiele. Das trifft vor allem auf die beiden Spieler zu, die zusammen nun versuchen müssen, den Spielmacher zum Mitnehmen eines Stiches zu zwingen. Häufig beobachtet man, dass diese mit dem Anspielen sehr niedriger Karten beginnen. Die ist leider meist die falsche Strategie. Besser ist es während des Spielverlaufes herauszufinden, ob der Spielmacher in einer Farbe eine „Schwachstelle“ haben könnte. Dann ist es gut, wenn man noch sehr niedrige Karten in dieser Farbe hat und anspielen kann.

3.4 Übersicht über die mögliche Reizwerte

Reizwert	Spiele
18	Schellen ohne/mit Einem
20	Herz ohne/mit Einem
22	Blatt ohne/mit Einem
23	Null einfach
24	Eicheln ohne/mit Einem
27	Schellen ohne/mit Zweien, Schellen Hand ohne/mit Einem
30	Herz ohne/mit Zweien, Herz Hand ohne/mit Einem
33	Blatt ohne/mit Zweien, Blatt Hand ohne/mit Einem
35	Null Hand
36	Eicheln ohne/mit Zweien, Eicheln Hand ohne/mit Einem Schellen ohne/mit Dreien, Schellen Hand ohne/mit Zweien
40	Herz ohne/mit Dreien, Herz Hand ohne/mit Zweien
44	Blatt ohne/mit Dreien; Blatt Hand ohne/mit Zweien
45	Schellen ohne/mit Vieren; Schell Hand, ohne/mit Dreien
46	Null ouvert
48	Eicheln ohne/mit Dreien, Eicheln Hand ohne/mit Zweien Grand ohne/mit Einem
50	Herz ohne/mit Vieren, Herz Hand ohne/mit Dreien
54	Schell Hand, ohne/mit Vieren
55	Blatt ohne/mit Vieren; Blatt Hand ohne/mit Dreien
59	Null ouvert Hand
60	Eicheln ohne/mit Vieren, Eicheln Hand ohne/mit Dreien Herz Hand ohne/mit Vieren
66	Blatt Hand ohne/mit Vieren
72	Eichel Hand ohne mit Vieren, Grand ohne/mit Zweien
96	Grand ohne/mit Dreien
120	Grand ohne/mit Vieren

Bemerkungen:
Es gibt noch einige Sonderspiele, wie beispielsweise Grand ouvert, die in der Tabelle keine Berücksichtigung finden.

3.5 Spielablauf und Regeln

Nach dem Reizen erhält ein Spieler den Zuschlag, das Spiel zu machen.
Dieser hat die Möglichkeit, den Skat aufzunehmen und zwei Karten auszutauschen. Nachdem er diese wieder abgelegt (gedrückt) hat, sagt er das Spiel an.

Achtung: Wenn ein Unter im Skat liegt kann dies dazu führen, dass sich der Spieler „überreizt“ hat, denn dieser Unter zählt grundsätzlich immer mit. Um in diesem Falle das Spiel noch zu gewinnen, muss er seine Gegner „Schneider“ spielen, also mindestens 90 Augen erzielen.

Vorhand spielt die erste Karte an. Die weiteren Karten werden immer jeweils von dem Spieler angespielt, der den vorhergehenden Stich eingenommen hat.

Es sind folgende Regeln beim Spiel zu beachten:

1. Es ist grundsätzlich die angespielte Farbe zuzugeben, wenn man sie besitzt.
2. Wird Trumpf gefordert, ist auch Trumpf zuzugeben, also eine Karte der Trumpffarbe oder ein Unter.
3. Hat man die angespielte Farbe nicht, so kann man mit einer Trumpfkarte stechen (und damit den Stich ggf. mitnehmen) oder eine andere Karte abwerfen.
4. Jedes Zeichen und jede Andeutung zwischen den Spielern, welche Karten ein anderer noch haben könnte, ist zu unterlassen.

Ziele des Spiels:

In Farbspielen und beim Grand geht es für den Spielmacher darum, mindestens 61 Augen zu einzunehmen. (Der Skat gehört dazu.) In diesem Falle zählt das Spiel als gewonnen. Hat sich der Spielmacher überreizt, so muss er sogar mindestens 90 Augen erzielen, damit er gewonnen hat.

Bei **Null-Spielen** dagegen darf der Spielmacher keinen einzigen Stich „mitnehmen“, egal ob dieser Augen enthält oder nicht. Sobald der Spielmacher bei einem Nullspiel einen Stich mitnehmen muss, hat dieser das Spiel verloren. Man beachte, dass hier die Unter kein Trumpf sind und die Kartenrangfolge 7; 8; 9; 10; U; O; K; D lautet.

In dem Fall, dass kein Spieler 18 sagt, wird sehr häufig **"Ramsch"** gespielt. In einem solchen Spiel spielt jeder für sich allein und nur die unter sind Trumpf. Derjenige, der die meisten Augen erhält ist dann der Verlierer. Oft muss derjenige, der den letzten Stich mitnehmen muss, dann auch den Skat nehmen.

3.6 Die Spielauswertung

Nach Spielende wird durch Auszählen der Augen ermittelt, ob das Spiel für den Spielmacher gewonnen oder verloren ist.

gewonnene Spiele:
Der Spielmacher bekommt den **Spielwert** = **Reizwert** des gespielten Spieles gutgeschrieben.
Erreicht er mindestens 90 Augen, so erhöht sich der Wert auf die Stufe „Schneider“.
Erhalten die Gegner keinen einzigen Stich, so erhöht sich der Wert zusätzlich auf die Stufe „schwarz“.

Beispiele:	Herz mit 2 mit 70 Augen „mit 2, spiel 3 mal 10 = 30 Punkte“
	Herz mit 2 mit 96 Augen „mit 2, spiel 3, Schneider 4 mal 10 = Punkte 40“.
	Null-Hand liefert 35 Punkte

verlorene Spiele:
Der Spielmacher bekommt für verlorene Spiele Minuspunkte. Die Höhe der Minuspunkte ist gleich dem **doppelten Spielwert** = **Reizwert** des gespielten Spieles.
Erreicht er nur höchstens 30 Augen, so erhöht sich der Wert vor dem Verdoppeln wie bei gewonnenen Spielen auf die Gewinnstufe „Schneider“.
Verlorene **Handspiele** werden nicht verdoppelt, sondern der einfache Spielwert (mit der Stufe Hand) mit den Minuspunkten.

Besonderheiten bei Handspielen:
Das Nichtaufnehmen des Skates (Handspiel) wird in mehrfacher Hinsicht belohnt. Vorteile sind:

1. keine Verdopplung bei verlorenem Spiel,
2. höherer Reizwert durch die Stufe Hand und
3. zwei weitere mögliche Gewinnstufen mit „Schneider angesagt“ und „schwarz angesagt“ möglich.

Beispiele:	Herz mit 2 mit 70 Augen „mit 2, spiel 3, verloren 6 mal 10 = 60 Minuspunkte“
	Herz Hand mit 2 mit 60 Augen „mit 2, spiel 3, Hand 4 mal 10 = 40 Minuspunkte“

3.7 Gedanken zur Spielführung

3.7.1 Die Anzahl der Trumpfkarten

In Farbspielen gibt es genau 11 Trumpfkarten.

Wenn man selbst vier solche hat, hat einer der Gegner mindestens genauso viele oder sogar mehr. Man sollte also ein solches Farbspiel nur dann wagen, wenn man ein gutes Beiblatt, das heißt stark besetzte Farbkarten in den anderen Farben hat. Natürlich kann man darauf hoffen, im Skat noch mindestens eine weitere Trumpfkarte zu finden.
Insgesamt ist es schon empfehlenswert, für ein Farbspiel mindestens fünf Trumpfkarten zu haben. Aber selbst dann kommt es auch darauf an, wie hoch diese selbst sind und auch, wie stark das Beiblatt ist, um das Spiel sicher nach Hause zu bringen.

Mit sechs Trumpfkarten hat man je nach Beiblatt schon eine sehr gute Voraussetzung für ein erfolgreiches Farbspiel.

Recht häufig werden Farbspiele mit sieben Trumpf verloren. Die Rede ist dann meist vom „Siebentrümpfer". Vielleicht liegt der Grund darin, dass der Spielmacher bei dieser hohen Anzahl an Trumpf wenig Augenschein auf sein Beiblatt nimmt und sich zu sicher fühlt. Liegen nämlich die vier anderen Trumpf in einer Hand, so können einige Stiche an die Gegenspieler gehen.

Für ein Grandspiel sollte man nicht den Fehler begehen, nur die Anzahl der Unter zu sehen. Hier ist es besonders wichtig, auch in den Farben gut besetzt zu sein. Wenn man in allen vier Farben gut besetzt ist, kann man ein Grandspiel auch mit nur einem oder sogar ganz ohne Unter gewinnen. Und selbst mit allen vier Untern ist ein Grandspiel nicht automatisch gewonnen. Den Gegnern reichen nur 3 Stiche, um auf 60 Augen zu kommen.

3.7.2 Welche Karten sollte man anspielen?

Als Spielmacher ist es häufig eine ganz gute Strategie, Trumpf zu fordern. Damit reduziert man die Trumpfkarten der Gegner pro Stich in der Regel um zwei Stück und hat selbst nur eine „verbraucht". Für den weiteren Spielverlauf kann das ein Vorteil sein. Man sollte dabei jedoch auch darauf achten, ob die Gegenspieler damit viele Augen einnehmen können.
Opfert man selbst einen Unter, so müssen die Gegenspieler einen höheren Unter opfern, um das Trumpfass für sich zu sichern. Damit wären zwei hohe Trumpfkarten bereits aus dem Spiel genommen.

Hat man selbst wenig Trumpf, so kann man "über die Dörfer" gehen. Das heißt man spielt seine hohen Farbkarten und bleibt damit vorn. Man muss dabei darauf hoffen, dass beide Gegenspieler die Farbe selbst haben und damit nicht stechen können. Also sollte man eine Farbe anspielen, die man nicht so oft besitzt. Ein blankes Daus bietet sich dafür beispielsweise an.

Generell ist es nicht gut, sich eine Zehn blank zu spielen, wenn das Ass in der Farbe noch im Spiel ist. Darauf sollte man zu Beginn des Spiels ebenfalls achten, egal ob man Spielmacher oder Mitspieler ist.

Aus der Sicht eines der beiden Mitspieler sollte man zu Beginn zunächst vorsichtig agieren. Der Spielmacher könnte eine Farbe komplett gedrückt haben und sofort stechen. Damit kann selbst ein blankes Daus schnell verloren gehen. Eine ganz gute Strategie ist es für die beiden Mitspieler so zu spielen, dass der Spielmacher in der Mitte sitzt, also als zweiter seine Karte legen muss. Das hat den Vorteil, dass der Spieler nach ihm immer noch die Wahl behält, welche Karte er legen kann.

In Nullspielen sollte man nicht gleich die niedrigsten Karten anspielen, sondern in den ersten Stichen ermitteln, wo die Schwachstellen des Spielmachers liegen. Diese ersten Stiche könnten dazu dienen, dass der Mitspieler zum Beispiel eine Farbe komplett abwerfen kann und dann nicht mehr zugeben muss, wenn man selbst die 7 der Farbe anspielt und der Spielmacher eventuell noch die 8 der Farbe besitzt.

Es ist immer von Vorteil, sich gut zu merken, welche Karten bereits gespielt wurden. Damit weiß man auch, welche noch im Spiel sind und welche Farben eventuell nicht mehr im Spiel sind. Es gibt Spieler, die es daneben sogar noch schaffen, die eingenommenen Augen mitzuzählen.

3.8 Wahrscheinlichkeiten beim Skat

3.8.1 Grundlagen zur Berechnung

Oft hört man bei Skatspielern Aussagen wie:
„Ich hatte den ganzen Abend immer höchstens einen Unter.“ oder
„Jetzt spiele ich schon zum drittem Mal in Folge ohne vier.“

Wie realistisch sind solche Aussagen? Das wollen wir in diesem Kapitel untersuchen. Ebenso spekuliert man ja oft auf den Skat.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann ich also dort einen weiteren Unter erwarten? Oder ein Ass?

Um Wahrscheinlichkeiten beim Skat auszurechnen, benötigen wir die sogenannten Binomialkoeffizienten. Sie werden uns bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten helfen. Diese wollen wir zunächst definieren und behandeln.

Def 3.1

Gegeben seien natürliche Zahlen n und k mit $n \geqslant k$. Die natürliche Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

*heißt **Binomialkoeffizient n über k**.*

Beispiel 1: $\binom{13}{3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286$

Beispiel 2: $\binom{32}{2} = \frac{32!}{2! \cdot 30!} = \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 496$

Beispiel 3: Berechnen Sie für n = 5 und $k \in \{0; 1; ...; 5\}$ die Binomialkoeffizienten.

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 1$$

Es fällt auf, dass es eine Symmetrie gibt.

Es ist: $\binom{5}{0} = \binom{5}{5}$; $\binom{5}{1} = \binom{5}{4}$ und $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$

Berechnet man die Summe aller sechs Binimialkoeffizienten erhält man $32 = 2^5$

Satz 3.1 ***Eigenschaften von Binomialkoeffizienten:***

Für Binomialkoeffizienten mit $n; k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ gilt:

1. $\binom{n}{0} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$
4. $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

Bemerkungen:

1. An dieser Stelle verzichten wir auf den Beweis der Regeln. Die ersten drei kann man über die die Definition zeigen, indem man die entsprechenden Terme umformt, auf einen Nenner erweitert und geschickt zusammenfasst. Die letzte Beziehung kann man mit Hilfe des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion beweisen.
2. Mit einem CAS können Binomialkoeffizienten über den Befehl *ncr(n,k)* berechnet werden.
3. Was bedeutet der Binomialkoeffizient in Bezug auf das Skatspiel?
   Mengentheoretisch hat der Binomialkoeffizient folgende Bedeutung: Er ist gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen, die man aus einer Menge mit n-Elementen bilden kann.
4. Bezogen auf das Skatspiel könnte man den Koeffizienten $\binom{32}{2}$ folgendermaßen deuten: Es gibt 496 Möglichkeiten genau 2 Karten aus einer Menge mit 32 Karten auszuwählen. Es gibt also 496 verschiedene Möglichkeiten für den Skat insgesamt.
5. 28 der 32 Karten sind keine Unter. Somit gibt es also $\binom{28}{2} = 378$ Möglichkeiten, einen Skat ohne Unter zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass also kein Unter im Skat liegt, beträgt folglich: $P(U = 0) = \frac{378}{496} = 76{,}21\%$.
6. Die Berechnung ist auf diese Weise möglich, weil jede der 496 Möglichkeiten mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt.
7. Man muss jedoch sagen, dass diese Wahrscheinlichkeit aus der allgemeinen Sicht gilt, bei der man keine der anderen ausgegebenen Karten kennt. Ein Spieler, der ja seine zehn Karten bereits kennt, wird das anders beurteilen.
   Hat er selbst bereits alle vier Unter auf der Hand, so weiß er bereits, dass mit Sicherheit kein weiterer Unter in Skat liegt.

3.8.2 Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Unter im Blatt

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man ein Blatt „ohne 4“? Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert das dreimal in Folge?
Diesen Fragen gehen wir jetzt auf den Grund. Dazu bezeichnen wir die Anzahl der Unter mit U. P(U = k) sei dann die Wahrscheinlichkeit, dass man genau k Unter hat.

Betrachten wir zunächst die Gesamtauswahl. Es gibt nach unseren bisherigen Überlegungen

$$\binom{32}{10} = 64512240$$

verschiedene Skatblätter. Von diesen sind

$$\binom{28}{10} = 13123110$$

ohne Unter. Der Anteil beträgt somit:

$$P(U = 0) = \frac{13123110}{64512240} = 20,34\%$$

Nur in etwa jedem fünften Spiel erhält man keinen Unter.
Dass das dreimal in Folge passiert, ist noch wesentlich seltener zu erwarten, nämlich nur mit der Wahrscheinlichkeit von $P(U = 0)^3 = 0,2034^3 = 0,84\%$.

Um zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau einen Unter erhält, muss man sich überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass das passiert.

Von den zehn Karten, die man erhält, kommt in diesem Fall genau einer aus der Menge der vier Unter. Dafür gibt es $\binom{4}{1} = 4$ Möglichkeiten.
Zu jeder dieser vier Möglichkeiten, gibt es weitere $\binom{28}{9} = 6906900$ Möglichkeiten, für die anderen 9 Karten.
So ergibt sich also:

$$P(U = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \frac{385}{899} = 42,83\%$$

In analoger Weise kann man nun die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Anzahlen der Unter berechnen. Die folgende Tabelle soll das veranschaulichen.

Die folgende Tabelle fasst die Möglichkeiten zusammen.

U	Berechnung	Ergebnis
0	$P(U=0) = \dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{1463}{7192}$	20,34%
1	$P(U=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\cdot\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{385}{899}$	42,83%
2	$P(U=2) = \dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{28}{8}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{2079}{7192}$	28,91%
3	$P(U=3) = \dfrac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{66}{899}$	7,34%
4	$P(U=4) = \dfrac{\binom{4}{4}\cdot\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \dfrac{21}{3596}$	0,58%

3.8.3 Wahrscheinlichkeiten für den Skat aus Sicht eines Spielers

Wir wissen bereits, dass allgemein gesehen, in etwa drei Viertel der Spiele kein Unter im Skat liegt. Nun wollen wir betrachten, wie das aus Sicht eines Spielers ist.

Jeder Spieler kennt nur seine 10 Karten. 22 Karten sind ihm unbekannt. Von diesen 22 Karten liegen genau 2 im Skat. Dafür gibt es $\binom{22}{2} = 231$ Möglichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein oder sogar zwei weitere Unter im Skat liegen könnten, hängt davon ab, wie viele Unter der Spieler selbst bereits hat. Hat er beispielsweise selbst keinen, so sind unter den 22 Karten, die er nicht kennt noch alle 4 Unter. Wenn er selbst jedoch bereits zwei hat, fehlen ja nur noch insgesamt zwei.

selbst	Skat	Berechnung	Ergebnis
0	0	$P(U=0)=\dfrac{\binom{4}{0}\cdot\binom{18}{2}}{\binom{22}{2}}=\dfrac{51}{77}$	66,23%
	1	$P(U=1)=\dfrac{4\cdot 18}{231}=\dfrac{24}{77}$	31,17%
	2	$P(U=2)=\dfrac{6\cdot 1}{231}=\dfrac{2}{77}$	2,65 %
1	0	$P(U=0)=\dfrac{\binom{3}{0}\cdot\binom{19}{2}}{\binom{22}{2}}=\dfrac{57}{77}$	74,03%
	1	$P(U=1)=\dfrac{3\cdot 19}{231}=\dfrac{19}{77}$	24,68%
	2	$P(U=2)=\dfrac{3\cdot 1}{231}=\dfrac{1}{77}$	1,30 %
2	0	$P(U=0)=\dfrac{\binom{2}{0}\cdot\binom{20}{2}}{\binom{22}{2}}=\dfrac{190}{231}$	82,25%
	1	$P(U=1)=\dfrac{2\cdot 20}{231}=\dfrac{40}{231}$	17,32%
	2	$P(U=2)=\dfrac{1\cdot 1}{231}$	0,43 %
3	0	$P(U=0)=\dfrac{\binom{1}{0}\cdot\binom{21}{2}}{\binom{22}{2}}=\dfrac{210}{231}$	90,91%
	1	$P(U=1)=\dfrac{1\cdot 21}{231}=\dfrac{1}{11}$	9,09%

3.8.4 Beispiele für weitere Wahrscheinlichkeiten

Prinzipiell kann man viele weitere Wahrscheinlichkeiten auf dieselbe Weise berechnen. Exemplarisch werden wir hier einige weitere Aufgaben vorstellen.

Beispiel 1: Ein Spieler möchte gern grün spielen und hat bereits 5 Trumpfkarten auf der Hand. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet er im Skat mindestens eine weitere Trumpfkarte?

Analyse:
Es gibt 11 Trumpfkarten und 21 Karten, die kein Trumpf sind.
Der Spieler selbst hat bereits 5 Trumpfkarten und 5 Karten, die kein Trumpf sind.
Damit verbleiben 6 Trumpfkarten und 16 Karten, die kein Trumpf sind. Aus zwei dieser Karten wird der Skat gebildet.

Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Skat keine Trumpfkarte enthält, beträgt:

$$P(T=0) = \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{16}{2}}{\binom{22}{2}} = \frac{30}{77} = 38,96\%$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit 61,04%.

Beispiel 2: Ein Spieler hat selbst (mit Benutzung des Skates) 2 Unter und möchte ein Grandspiel spielen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat einer seiner Gegenspieler ebenfalls zwei Unter in seiner Hand?

Analyse:
Die beiden Gegenspieler erhalten zusammen 20 Karten.
Darunter sind 2 Unter und 18 andere Karten.
Jeder Gegenspieler erhält davon 10 Karten.
Betrachten wir einen der beiden Gegenspieler, so kann dieser entweder 0 oder 1 oder 2 Unter erhalten. Damit liegt die Zahl der Unter für den zweiten Gegenspieler fest.
Wir berechnen also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste der beiden Gegenspieler 0 oder 2 Unter hat. Damit wäre das Ereignis erfüllt.

Lösung:

$$P(T=2)=\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{18}{10}+\binom{2}{2}\cdot\binom{18}{8}}{\binom{20}{10}}=\frac{9}{19}=47,37\%$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also fast 50%.
Deshalb sind in einer solchen Situation zwei Faktoren wichtig. Welche Unter hat man als Spielmacher? Noch wichtiger ist jedoch die Frage, ob man selbst in Vorderhand sitzt, also anspielen kann.

Beispiel 3: Ein Spieler möchte gern ein Farbspiel spielen und hat nach Aufnahme des Skates 5 Trumpfkarten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat einer seiner Gegenspieler mindestens ebenso viele Trumpfkarten auf der Hand?

Analyse:
Es gibt 11 Trumpfkarten. Die Gegner zusammen haben also 6 Trümpfe. Wir betrachten einen Gegenspieler. Wenn dieser 0, 1, 5 oder 6 Trumpfkarten besitzt, ist das Ereignis erfüllt.
Der Gegenspieler erhält 10 der 20 Karten, die der Spieler nicht kennt.

Lösung:

$$P(T=0)=\frac{\binom{6}{0}\cdot\binom{14}{10}}{\binom{20}{10}}=\frac{7}{1292}=0,54\%$$

$$P(T=1)=\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{14}{9}}{\binom{20}{10}}=\frac{21}{323}=6,50\%$$

$$P(T=5)=\frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{14}{5}}{\binom{20}{10}}=\frac{21}{323}=6,50\%=P(T=1)$$

$$P(T=6)=P(T=0)=0,54\%$$

Es ergibt sich damit eine Gesamtwahrscheinlichkeit von etwa 14,1 % dafür, dass einer der Gegner mindestens gleich viele Trumpfkarten besitzt.

4 Einfache Spielmatrizen

4.1 Hase oder Hirsch

4.2 Kampf der Geschlechter

4.3 Schnick-Schnack-Schnuck