Platonische und archimedische Parkettierungen

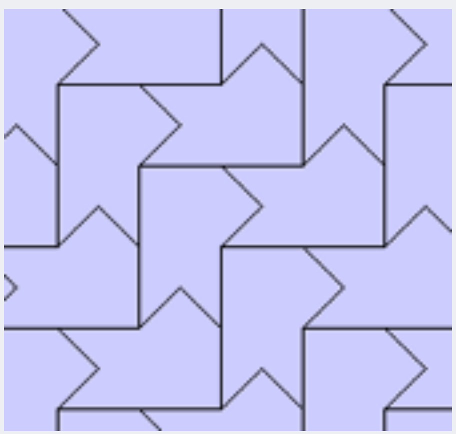
Meisterklasse Mathematik Dresden 2016
Olaf Schimmel

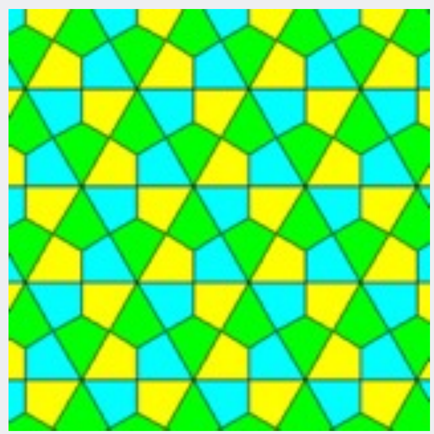
Inhaltsübersicht

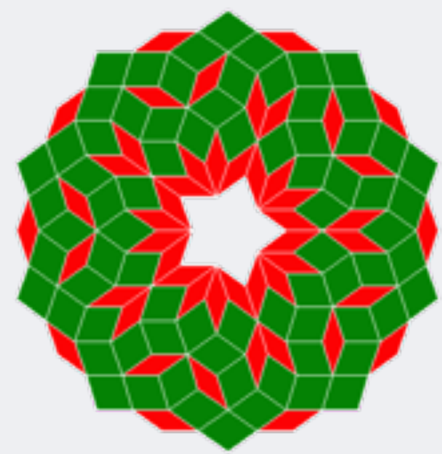
1 Was sind Parkettierungen?

Definition:

Jede überlappungsfreie und lückenlose Überdeckung der Ebene durch Polygone (Vielecke) heißt Parkettierung.

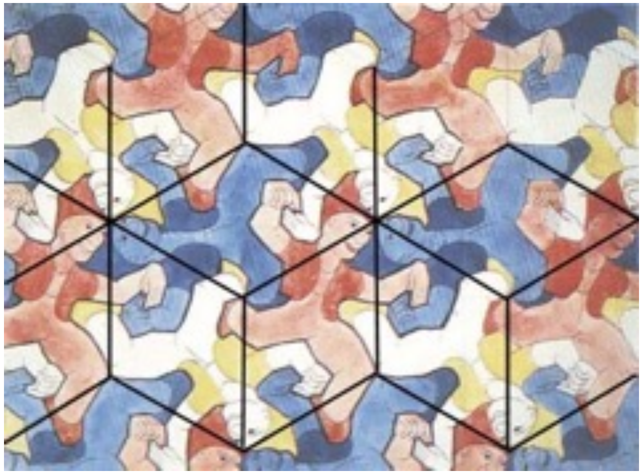






I Was sind Parkettierungen?

Parkette nach M.C. Escher



Nach unserer Definition liegen hier keine Parkettierungen vor, da auch gekrümmte Linien auftauchen.

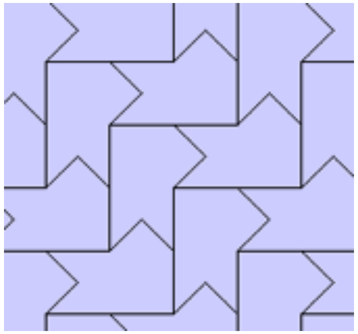
I Was sind Parkettierungen?

Fragen:

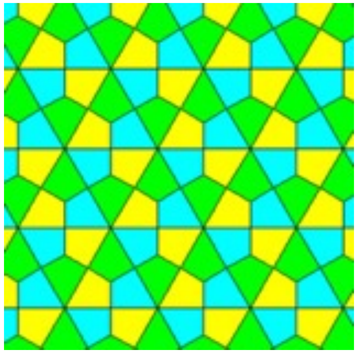
1. Gibt es Parkettierungen aus paarweise kongruenten Polygonen?
2. Gibt es Parkettierungen aus regelmäßigen kongruenten Polygonen?
3. Welche regelmäßigen Polygone eignen sich für solche Parkettierungen und wie findet man sie?

1 Was sind Parkettierungen?

Erste Antworten:



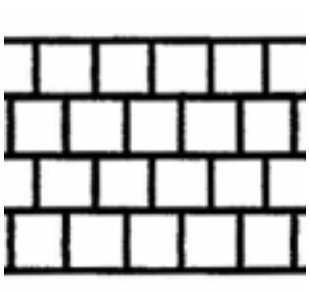
Diese Polygone sind einander kongruent.
Nicht immer treffen Ecken auf Ecken.



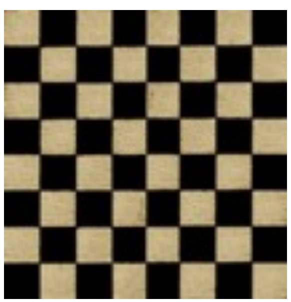
Die Polygone sind kongruent.
Es treffen Ecken nur auf Ecken.
Die Polygone sind nicht regelmäßig.

I Was sind Parkettierungen?

Erste Antworten:



Die Polygone sind regulär.
Es treffen aber auch Ecken auf Kanten.



Ein Parkett aus Quadraten.
Es treffen Ecken nur auf Ecken und Kanten liegen nur an Kanten an.
(*Kante-an-Kante-Parkett)*
Alle Quadrate sind kongruent.
An jeder Ecke treffen vier Quadrate zusammen.

I Was sind Parkettierungen?

Vereinbarungen für die folgenden Betrachtungen:

(I) Es werden nur regelmäßige Polygone verwendet.

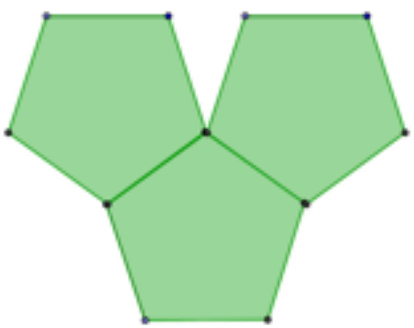
(II) Die Seitenlänge aller verwendeten Polygone ist gleich.

(III) Die Polygone werden stets so zusammengesetzt, dass ausschließlich Eckpunkte aufeinander treffen.
Kante-an-Kante-Parkette

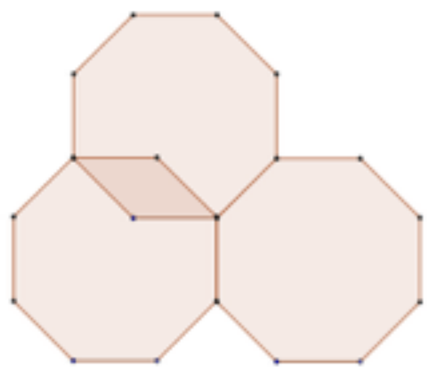
2 Warum Winkel wichtig sind

Wir erinnern uns:

Es soll eine lückenlose und überlappungsfreie Auslegung der Ebene erfolgen.



Lücke



Überlappung

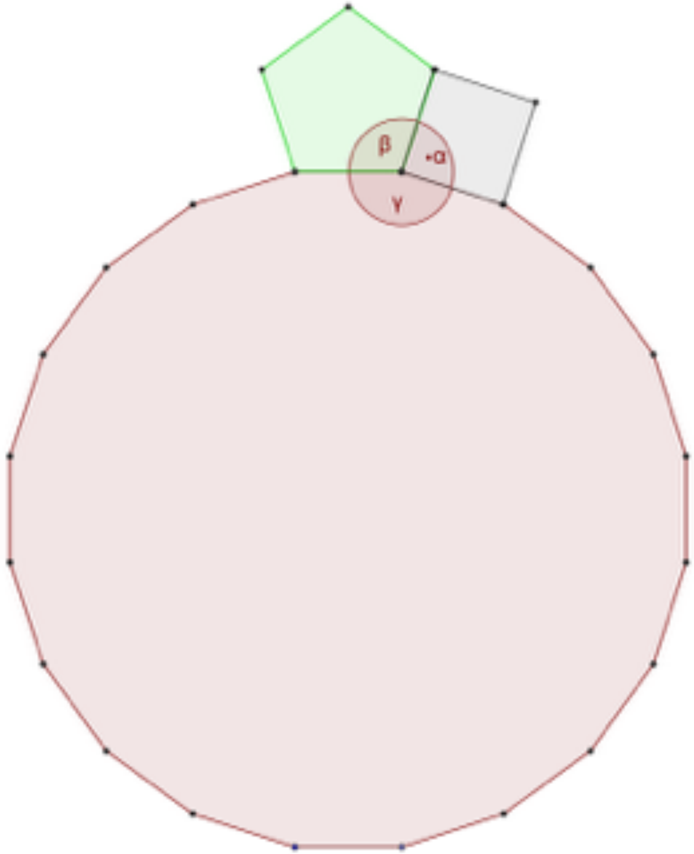
passende Winkel

2 Warum Winkel wichtig sind

Das geht nur, wenn die
folgende Bedingung erfüllt ist:

Die Summe der Innenwinkel
der verwendeten Polygone
muss an jeder Ecke
genau 360° betragen.

Beispiel: [4-5-20]



2 Warum Winkel wichtig sind

Welche Innenwinkel können bei regelmäßigen Polygonen auftreten?

(Arbeitsblatt 1 - Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck)

2 Warum Winkel wichtig sind

In jedem regelmäßigen n-Eck gilt für einen beliebigen Innenwinkel:

$$\varphi = 180° - \frac{360°}{n}$$

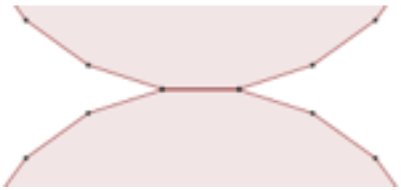
Schlussfolgerungen:

1. Jeder Innenwinkel ist mindestens 60°.
2. Jeder Innenwinkel ist kleiner als 180°.

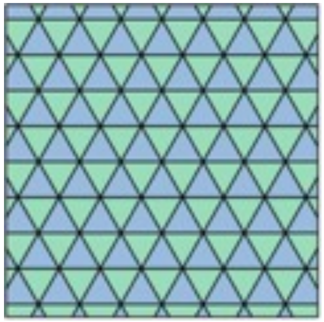
2 Warum Winkel wichtig sind

Für unsere Parkette ergeben sich damit zwei wichtige Aussagen:

An jeder Ecke müssen mindestens 3 Polygone zusammenstoßen.



An jeder Ecke können höchstens 6 Polygone zusammenstoßen.
6 Dreiecke: $6 \cdot 60° = 360°$



3 Platonische Parkette

Definition:

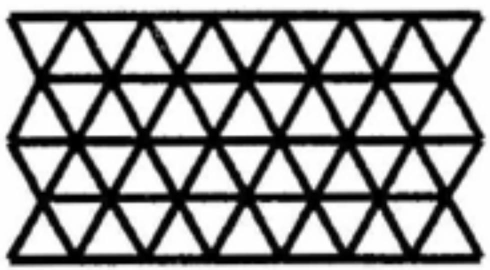
Eine Parkettierung der Ebene heißt **platonisch** genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Alle Kacheln sind regelmäßige Polygone.

(2) Alle Polygone sind paarweise kongruent.

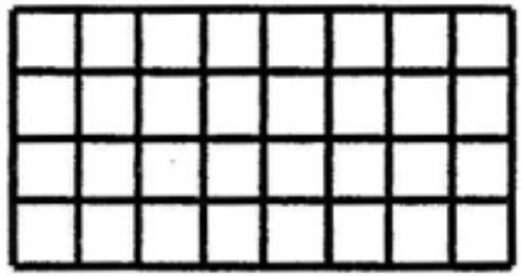
(3) Jeder Eckpunkt jedes Polygons trifft ausschließlich auf Ecken anderer Polygone.

3 Platonische Parkette



platonisches Parkett aus lauter gleichseitigen Dreiecken.
Bezeichnung: **3-3-3-3-3-3**

platonisches Parkett aus lauter Quadraten.
Bezeichnung: **4-4-4-4**



platonisches Parkett aus regelmäßigen Sechsecken
Bezeichnung: **6-6-6**

3 Platonische Parkette

Satz: Es gibt nur genau drei verschiedene platonische Parkettierungen.

Beweis: Wir wissen:
An jeder Ecke treffen mindestens 3 aber höchstens 6 Kacheln aufeinander.

$n = 3 \rightarrow \varphi = 360° : 3 = 120°$ → drei Sechsecke
$n = 4 \rightarrow \varphi = 360° : 4 = 90°$ → vier Quadrate
$n = 5 \rightarrow \varphi = 360° : 5 = 72°$ → keine Lösung
$n = 6 \rightarrow \varphi = 360° : 6 = 60°$ → sechs Dreiecke

4 Archimedische Parkette

Definition:

Eine Parkettierung der Ebene heißt archimedisch genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

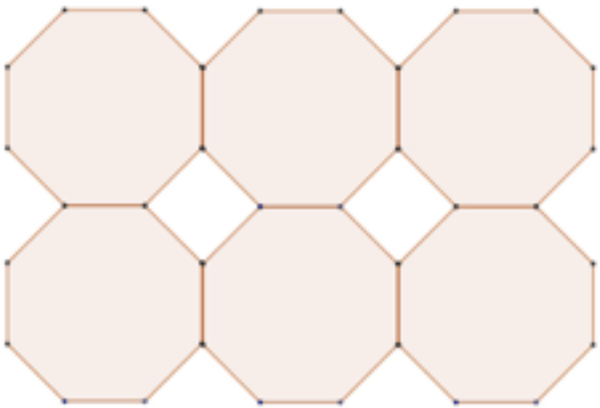
(1) Alle Kacheln sind regelmäßige Polygone.

(2) Es gibt mindestens zwei verschiedene Arten von Polygonen.

(3) Ecken treffen ausschließlich auf Ecken.

(4) An jeder Ecke treffen die Polygone stets in derselben Reihenfolge aufeinander.

Beispiel: Das Parkett 8-8-4



An jeder Ecke treffen zwei Achtecke und ein Quadrat aufeinander.

Winkelbedingung:

Achteck: 135°
Quadrat: 90°
Summe: $2 \cdot 135° + 90° = 360°$

5 Welche Variationen…

…von Vielecken erfüllen die Winkelbedingung?

Überlegungen zu 3 Kacheln pro Ecke (k = 3):

Behauptung:
Mit zwei der drei verwendeten Vielecke muss man 180° überschreiten.

Welches Vieleck muss man mindestens mit einem **Dreieck** kombinieren, um 180° zu überschreiten?

Finde heraus, für welche n der Form (3-7-n), (3-8-n), …
die Winkelbedingung erfüllt wird …
(Tafel)

5 Welche Variationen…

…von Vielecken erfüllen die Winkelbedingung?

Arbeitsauftrag 2.3:

Finde weitere Kombinationen regelmäßiger Vielecke, die die Winkelbedingung für eine Parkettierung erfüllen!

Arbeitsauftrag 3.1

Untersuche, ob zu den gefundenen Kombinationen tatsächlich eine Parkettierung entsteht!
Überlege, ob durch Vertauschungen der Reihenfolge der angeordneten Vielecke zu unterschiedlichen Parketten kommen kann!

5 Welche Variationen…

…von Vielecken erfüllen die Winkelbedingung?

Ergebnis 2.3:

k = 3: (9 Stück) 3-7-42; 3-8-24; 3-9-18; 3-10-15; 3-12-12; 4-5-20; 4-6-12; 4-8-8; 5-5-10

k = 4: (5 Stück) 3-3-4-12; 3-3-6-6; 3-6-3-6, 3-4-4-6 3-4-6-4

k = 5: (3 Stück) 3-3-3-3-6; 3-3-3-4-4; 3-3-4-3-4

Was unterscheidet die rot markierten von den schwarzen?

6 Warum die „Winkelbedingung“ allein nicht reicht

Wir haben festgestellt:

Nicht jede Kombination von Vielecken, für die die Winkelbedingung stimmt, führt auf ein archimedisches Parkett.

Warum ist das so?

6 Warum die „Winkelbedingung“ allein nicht reicht

Feststellung:

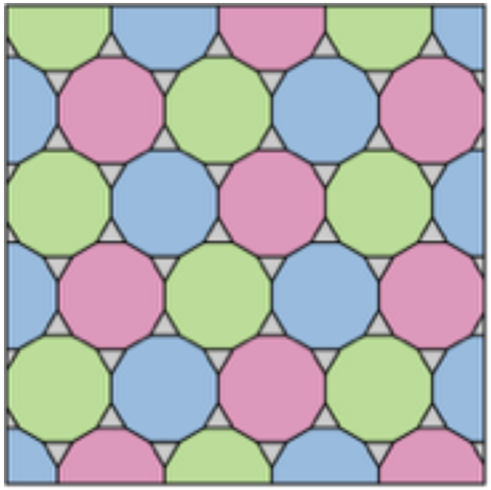
Es gibt kein archimedisches Parkett mit drei verschiedenen Kacheln pro Ecke, wenn eines der n-Ecke ungerade Eckenzahl hat.

Beweis: (Tafel)

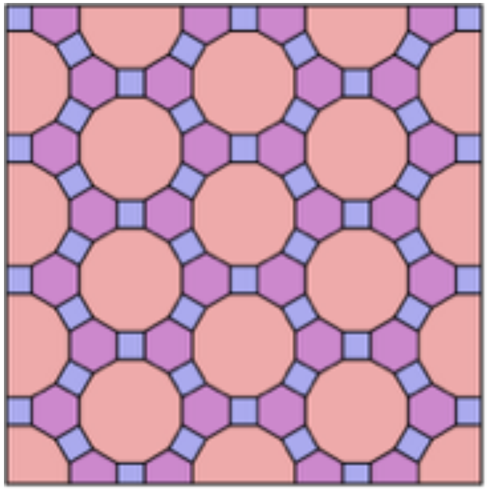
7 Übersicht über die archimedischen Parkette

k = 3

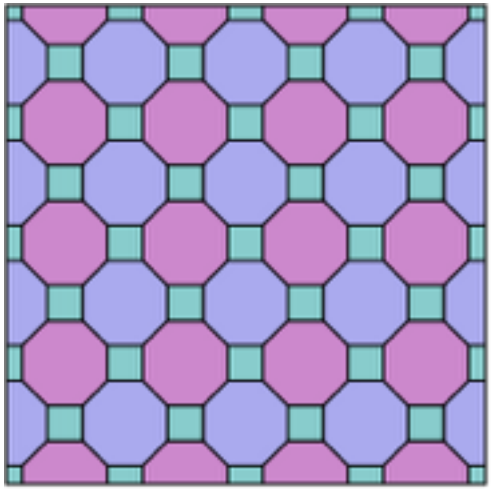
3-12-12



4-6-12



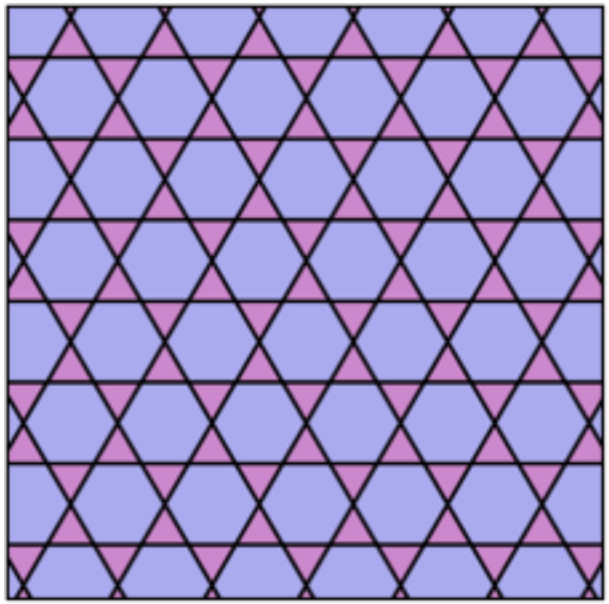
4-8-8



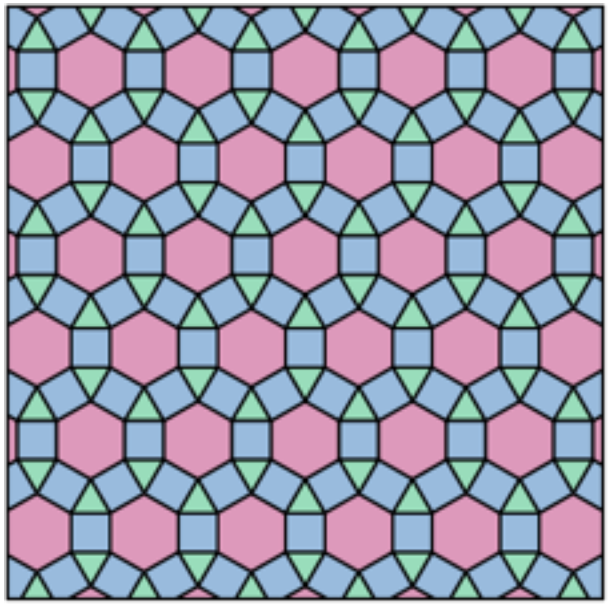
7 Übersicht über die archimedischen Parkette

k = 4

3-6-3-6



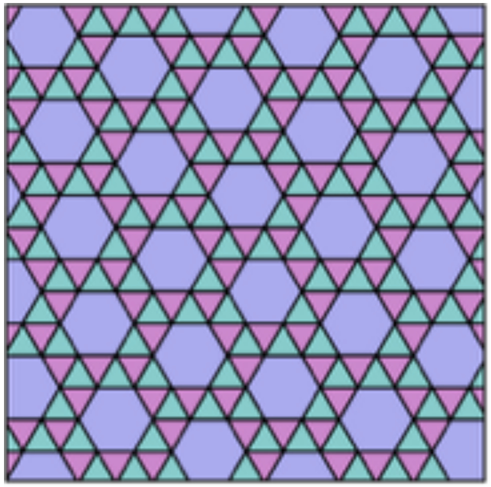
3-4-6-4



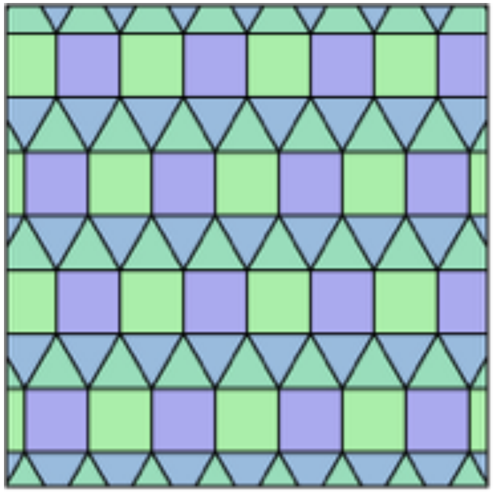
7 Übersicht über die archimedischen Parkette

k = 5

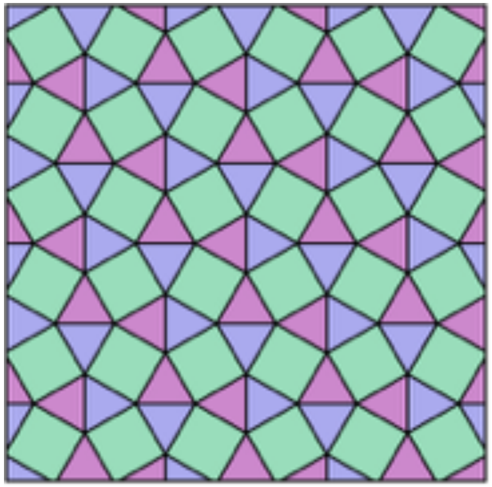
3-3-3-3-6



3-3-3-4-4



3-3-4-3-4



Informationen über den Dozenten

Olaf Schimmel
Lehrer am Ulf-Merbold-Gymnasium Greiz

Website: www.mathoid.de

Mail: kozi@mathoid.de