Komplexe Zahlen

Skript für Matheplus 2016

Olaf Schimmel

1 Imaginäre und komplexe Zahlen

1.1 Die imaginäre Einheit und imaginäre Zahlen

Wir kennen die Zahlenbereiche und ihre schrittweise Erweiterung, beginnend von den natürlichen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen noch aus dem Mathematikunterricht der Schule. Immer war es eine Rechenoperation, die nicht ohne Einschränkung ausführbar war und folgerichtig zu einer Erweiterung führte. Das erste Problemkind war die Subtraktion. Um sie für beliebige natürliche Zahlen ausführen zu können, mussten die negativen ganzen Zahlen hinzugefügt werden und der Bereich der ganzen Zahlen war geboren. Damit auch noch die Division - außer die durch Null - funktioniert, war die Erweiterung auf die gebrochenen und die rationalen Zahlen erforderlich. Wir konnten feststellen, dass nun die vier Rechenoperationen funktionierten, dass zu jeder rationalen Zahl ein Punkt auf der Zahlengerade gehört, dass sie dicht liegen und es sah erstmal so aus, als würden wir keine weiteren Zahlen brauchen. Wie groß war aber das Erstaunen, als wir die Gleichung $x^2 = 2$ zu lösen hatten und die $\sqrt{2}$ daher kam. Wir konnten beweisen, dass sie nicht zu den rationalen Zahlen gehören kann[1] und trotzdem fand sich zu ihr ein Punkt auf der Zahlengeraden. Um also anders gesagt auch die nichtperiodischen unendlichen Dezimalzahlen mit aufzunehmen, erfolgte die Erweiterung auf die reellen Zahlen. Nun war die Zahlengerade endlich gefüllt, zu jedem Punkt gab es eine reelle Zahl und zu jeder Zahl in eindeutiger Weise auch einen Punkt. Ein Grund, sich zufrieden zurückzulehnen. Doch es tauchen sehr schnell wieder Gleichungen auf, die auf Probleme führen. Schon im Bereich der quadratischen Gleichungen findet man sie. Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

ist wohl das einfachste Beispiel.

Natürlich könnte man sich den Graphen der Funktion $y = f(x) = x^2$ ansehen und mit der Gerade y = -1 vergleichen. Da es keine Schnittstellen der beiden Graphen gibt, gibt es auch keine Lösung der Gleichung. Dies ist auch richtig, wenn man die reellen Zahlen als Grundbereich festlegt.
Doch was geschieht, wenn man dieselben Überlegungen wie bei den vorherigen Zahlenbereichen zu Grunde legt und annimmt, dass obige Gleichung doch eine Lösung besitzt, diese nur

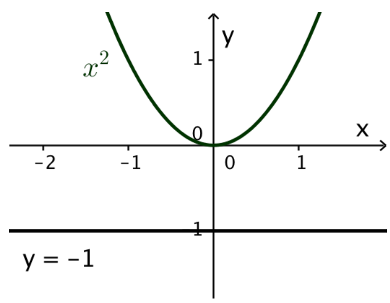

Abbildung 1.1: x^2 und $y = -1$

[1] Dieser Beweis gehört zu den klassischen indirekten Beweisen. Man nimmt an, dass es für $\sqrt{2}$ eine vollständig gekürzte Bruchdarstellung gibt und führt diese Annahme zu einem Widerspruch.

nicht in unserem bekannten Zahlenbereich liegt? Dann wäre doch die folgende Definition sinnvoll.

Definition 1.1 *Die Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ heißt* ***imaginäre Einheit i****.*

Damit folgt sofort:

$$i = \sqrt{-1}$$

Was für eine Zahl ist aber dieses $i = \sqrt{-1}$? Eine reelle Zahl ist es nicht und es gibt zu ihr auch keinen Punkt auf der Zahlengeraden. Wie rechnet man mit i oder Zahlen, die die imaginäre Einheit enthalten? Natürlich sollen unsere bekannten Rechengesetze für die "neuen“ Zahlen weiterhin gelten.

Satz 1.1 *Es sei i die imaginäre Einheit und a eine beliebige nichtnegative reelle Zahl. Dann gilt:*

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$$

Beweis 1.1 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \sqrt{-a} &= \sqrt{(-1) \cdot a} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} \\ &= \sqrt{a} \cdot i \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir Zahlen erhalten, die die Struktur $b \cdot i$ besitzen, wobei b eine beliebige reelle Zahl ist.

Definition 1.2 *Sei i die imaginäre Einheit und b eine beliebige reelle Zahl. Dann heißt jede Zahl der Form:*

$$b \cdot i$$

imaginäre Zahl*.*

Wenn wir nun mit imaginären Zahlen rechnen, können wir sehr leicht die bekannten Rechengesetze auf die neuen Zahlen übertragen:

Satz 1.2 *Für die imaginäre Einheit i gilt:*

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{(4n+1)} &= i \\ i^{(4n+2)} &= (-1) \\ i^{(4n+3)} &= -i \end{aligned}$$

Beweis 1.2 *Wir berechnen zunächst die Potenzen von i.*

$$\begin{aligned} i^2 &= (-1) \\ i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir den Term i^{k+4}:

$$\begin{aligned} i^{k+4} &= i^k \cdot i^4 \\ &= i^k \cdot 1 \\ &= i^k. \end{aligned}$$

Analoges gilt auch für die Potenz i^{k-4}:

$$\begin{aligned} i^{k-4} &= \frac{i^k}{i^4} \\ &= \frac{i^k}{1} \\ &= i^k. \end{aligned}$$

Damit ist die obige Aussage für alle ganzzahligen Exponenten von i bewiesen.

Satz 1.3 *Es sei i die imaginäre Einheit und n eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:*

$$(-i)^{-n} = i^n$$

Beweis 1.3

$$\begin{aligned} (-i)^{-n} &= \left(i^3\right)^{-n} \\ &= i^{(-3n)} \\ &= i^{(-3n+4n)} \\ &= i^n. \end{aligned}$$

Damit ist es möglich, mit imaginären Zahlen zu rechnen. Wir übertragen die bekannten Rechengesetze auf die neuen Zahlen.

Definition 1.3 *Seien a und b reelle Zahlen und i die imaginäre Einheit. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} a \cdot i \pm b \cdot i &= (a \pm b) \cdot i \\ a \cdot i \cdot b \cdot i &= -ab \\ \frac{a \cdot i}{b \cdot i} &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Damit sind Grundlagen für das Rechnen gesetzt.
Bemerkenswert ist, dass das Produkt und auch der Quotient zweier imaginärer Zahlen reelle Zahlen ergeben.
Man beachte, dass sich die Wurzelgesetze nicht uneingeschränkt übertragen lassen. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel:

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12}$$

Würden die Wurzelgesetze gelten, so käme man auf den folgenden Rechenweg:

$$\begin{aligned} \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-12} &= \sqrt{(-3) \cdot (-12)} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

Wendet man dagegen unsere obige Definition an, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-12} &= \sqrt{3}\cdot i\cdot\sqrt{12}\cdot i\\ &= \sqrt{36}\cdot i^2\\ &= -6\end{aligned}$$

Wir sehen also: Die Rechengesetze für Wurzeln lassen sich nicht ohne Einschränkung auf imaginäre Zahlen erweitern. Insbesondere für Wurzeln aus negativen Zahlen ist zunächst die Umformung in imaginäre Zahlen anzuwenden und erst anschließend weitere Rechengesetze.

1.2 Definition der komplexen Zahl

Da beim Rechnen mit imaginären Zahlen auch reelle Zahlen entstehen können, ist die Definition einer Zahlenmenge sinnvoll, die sowohl die reellen als auch die imaginären Zahlen als Teilmengen enthält.

Definition 1.4 *Seien a und b beliebige reelle Zahlen und i die imaginäre Einheit. Dann heißt jede Zahl z, die in der Form*

$$z = a + b\cdot i$$

dargestellt werden kann, ***komplexe Zahl****.*
a heißt ***Realteil*** *von z, $b\cdot i$ heißt* ***Imaginärteil*** *von z. Die Form $a+b\cdot i$ nennt man auch* ***kartesische Form***[2] *der komplexen Zahl z.*

Tatsächlich sind sowohl die reellen als auch die imaginären Zahlen in der Menge enthalten. Für a = 0 erhält man die imaginären und für b = 0 die reellen Zahlen.

Definition 1.5 *Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 heißen einander gleich, wenn sie sowohl in ihren Realteilen, als auch ihren Imaginärteilen übereinstimmen.*

Mit der Definition der komplexen Zahlen hat nun jede quadratische Gleichung mindestens eine Lösung. Es bleibt der Sonderfall, dass es genau eine Lösung gibt, wenn unter der Wurzel die Zahl 0 entsteht. Wir betrachten ein Beispiel. Zu lösen ist die Gleichung:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

Mit der Lösungsformel erhalten wir.

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= 2\pm\sqrt{4-13}\\ &= 2\pm\sqrt{-9}\\ x_1 &= 2+3\cdot i\\ x_2 &= 2-3\cdot i\end{aligned}$$

In der Menge der komplexen Zahlen hat die Gleichung also zwei Lösungen. Damit ist auch jedes quadratische Polynom in komplexe Linearfaktoren zerlegbar. Für unser Beispiel gilt:

$$x^2 - 4x + 13 = (x-2-3\cdot i)\cdot(x-2+3\cdot i)$$

Auffallend ist, dass die beiden Lösungen gleiche Realteile und genau entgegengesetzte Imaginärteile haben.

[2] Die kartesische Form wird in manchen Büchern auch als arithmetische Form bezeichnet.

Definition 1.6 *Zwei komplexe Zahlen $z = a + b \cdot i$ und $\overline{z} = a - b \cdot i$, die gleiche Realteile und entgegengesetzte Imaginärteile haben, heißen* ***konjugiert komplex****.*

1.3 Die Gaußsche Zahlenebene

Wie aber kann man komplexe Zahlen vergleichen, ordnen oder grafisch veranschaulichen? Eine Zahlengerade eignet sich nicht, denn bereits die reellen Zahl füllen die Zahlengerade aus. Analog könnte man eine weitere Gerade zur Veranschaulichung der imaginären Zahlen anlegen. Kombiniert man beide Geraden wie die Achsen in einem Koordinatensystem, So erhält man eine ganze Ebene zur Darstellung der komplexen Zahlen. Sie wird als **Gaußsche Zahlenebene**[3] bezeichnet. Jedem Punkt in dieser Ebene lässt sich eindeutig eine komplexe Zahl zuordnen und umgekehrt gehört zu jeder komplexen Zahl genau ein Punkt der Gaußschen Zahlenebene. In der Abbildung sehen wir die Darstellungen der komplexen Zahlen z_1 bis z_7. Dabei ist $z_6 = 4$eine reelle Zahl und $z_7 = -2i$ eine imaginäre Zahl. Die Zahlen $z_3 = -4 + 3i$ und $z_4 = -4 - 3i$ sind konjugiert komplexe Zahlen. Für z_4 und z_5 gilt dies nicht, denn beide haben gleiche Imaginärteile.

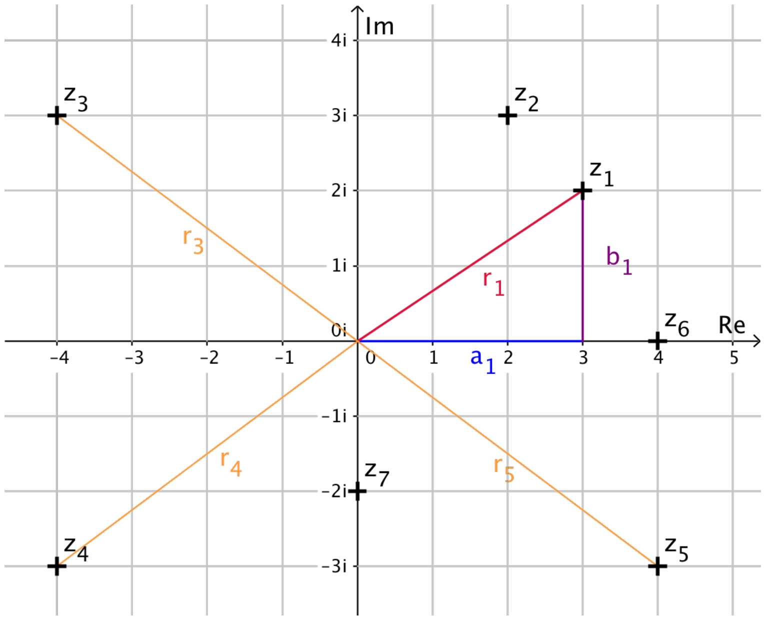

Abbildung 1.2: Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Die Abbildung macht zudem deutlich, was man als „Betrag“ einer komplexen Zahl sinnvoll festlegen könnte. Die Abstände der Zahl zum Ursprung der Zahlenebene, hier durch die Strecken r_1, r_3, r_4 und r_5 dargestellt, könnten diese Rolle übernehmen.

Definition 1.7 *Gegeben sei eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$. Die reelle Zahl*

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

heißt ***Betrag*** *der Zahl z.*

Damit kann man komplexe Zahlen zumindest hinsichtlich ihrer Beträge miteinander vergleichen, denn eine Vergleichbarkeit oder gar Ordnung zwischen den Zahlen selbst ist

[3] Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) gilt als einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker.

nicht gegeben. In der Abbildung kann man erkennen, dass gilt:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{3^2+2^2} \\ &= \sqrt{13} \\ |z_2| &= \sqrt{2^2+3^2} \\ &= \sqrt{13} \\ |z_1| &= |z_2| \end{aligned}$$

Analog gilt auch $|z_3| = |z_4| = |z_5| = 5$.

1.4 Rechnen in der kartesischen Form

In diesem Abschnitt werden wir prüfen, inwieweit sich die Rechengesetze, die wir von den reellen Zahlen her kennen, auf das Rechnen mit komplexen Zahlen übertragen lassen. Wir nutzen dazu die Rechenregeln für reelle und für imaginäre Zahlen.

1.4.1 Addition und Subtraktion

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$. Wir berechnen zunächst die Summe und die Differenz der Zahlen.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i \\ z_1 - z_2 &= a_1 + b_1 \cdot i - (a_2 + b_2 \cdot i) \\ &= a_1 + b_1 \cdot i - a_2 - b_2 \cdot i \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \cdot i \end{aligned}$$

Wir halten fest:

Definition 1.8 *Zwei komplexe Zahlen in der kartesischen Form werden addiert (subtrahiert) indem man ihre Realteile und ihre Imaginärteile jeweils addiert (subtrahiert).*

Beispiel:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 + 2i \\ z_2 &= -2 + i \\ z_1 + z_2 &= 3 + 2i + (-2) + i \\ &= 1 + 3i \\ z_1 - z_2 &= 3 + 2i - (-2) - i \\ &= 5 + i \end{aligned}$$

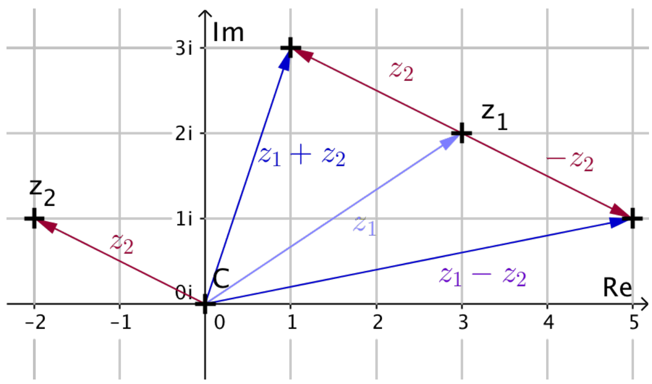

Abbildung 1.3: Summe und Differenz

Wir sehen, dass die Summe und die Differenz nicht unbedingt einen größeren Betrag haben müssen als die Ausgangszahlen. Eine einfache geometrische Möglichkeit, die Summe oder Differenz zu bilden, ist es, die Zahlen als Vektoren zu betrachten und vektoriell zu addieren oder zu subtrahieren.
Die Rechengesetze für die Addition der reellen Zahlen lassen sich auch bei komplexen Zahlen in arithmetischer Form anwenden. Damit gilt also auch für die Addition komplexer Zahlen das Kommutativ- und das Assoziativgesetz.

Satz 1.4 *Gegeben seien die komplexen Zahlen z_1, z_2 und z_3. So gilt:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

1.4.2 Multiplikation und Division

Wir versuchen nun Zahlen in der kartesischen Form zu multiplizieren und zu dividieren. Dabei sollen alle Rechengesetze weiterhin gelten. Dazu betrachten wir zunächst zwei gegebene komplexe Zahlen: $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$.
Für ihr Produkt gilt nach dem Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2\ i) \\
&= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i + b_1 i \cdot b_2 i \\
&= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i - b_1 \cdot b_2 \\
&= a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_2 i + a_2 \cdot b_1 i \\
&= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) i
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich hier die Rechnung doch schwieriger gestaltet als bei Addition und Subtraktion.
Für den Quotienten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2\ i} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \cdot (a_2 - b_2 i)} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 i + b_1 i \cdot a_2 - b_1 i \cdot b_2 i}{(a_2)^2 - (b_2 i)^2} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 i - a_1 \cdot b_2 i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \\
&= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) i}{(a_2)^2 + (b_2)^2}
\end{aligned}$$

Das Erweitern ermöglicht die Anwendung der dritten Binomischen Formel im Nenner, so dass hier die imaginäre Einheit nicht mehr auftaucht. Dadurch kann man auch den Quotienten wieder in die kartesische Form bringen. Es gilt also.

Satz 1.5 *Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_2b_1 + a_1b_2) \cdot i \\ z_1 : z_2 &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \cdot i \end{aligned}$$

Speziell das Quadrat einer Zahl berechnet man nun mit:

$$z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2ab \cdot i$$

Im Folgenden werden wir zwei Beispiele berechnen und eines davon anschließend in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulichen. Dazu betrachten wir die Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 2 + i$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 \cdot 2 - 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 3 \cdot 1) \cdot i \\ &= 4 + 7 \cdot i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{2^2 + 1^2} + \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2^2 + 1^2} \cdot i \\ &= \frac{8}{5} + \frac{1}{5} i \end{aligned}$$

In der Grafik stellt z_3 das Produkt aus z_1 und z_2 dar. Zunächst erscheint es nicht so, als gäbe es einen einfachen geometrischen Zusammenhang. Betrachtet man jedoch einmal die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3, so kann man feststellen, dass es einen Zusammenhang zwischen diesen Winkeln gibt. Man rechnet leicht nach, dass die Beziehung

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_3$$

gilt.
Weiterhin kann man nachprüfen, dass auch der Betrag der Zahlen z_1, z_2 und z_3 in Zusammenhang stehen.
So ist:

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ |z_2| &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |z_3| &= \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{5} \\ |z_3| &= |z_1| \cdot |z_2| \end{aligned}$$

Später werden wir noch allgemein zeigen, dass dieser Zusammenhang kein Zufall ist.

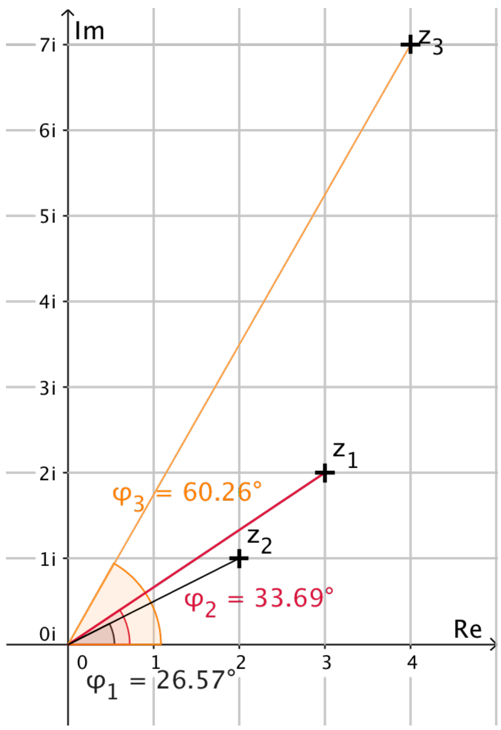

Abbildung 1.4: Produkt $z_3 = z_1 \cdot z_2$

Für den Quotienten gilt in analoger Weise: Der Winkel für den Quotienten ist die Differenz der Winkel der beiden Zahlen. Und für die Beträge ist der Betrag des Quotienten der Zahlen gleich dem Quotienten aus den Beträgen der Zahlen. Da sich die Berechnung von Produkten und Quotienten über die hergeleiteten Formeln in der arithmetischen Form doch eher umständlich gestaltet, könnte man nach Möglichkeiten suchen, komplexe Zahlen auf andere Weise darzustellen.

1.4.3 Zusammenhänge zwischen z und $\overline{z}$

Zwischen der komplexen Zahl und ihrer konjugiert komplexen Zahl gibt es Zusammenhänge, die zu rechnerischen Hilfen genutzt werden können. Betrachten wir zunächst die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten aus z und $\overline{z}$:

$$\begin{aligned}
z &= a + b \cdot i \\
\overline{z} &= a - b \cdot i \\
z + \overline{z} &= 2a \\
z - \overline{z} &= 2b \cdot i \\
z \cdot \overline{z} &= (a + b \cdot i)(a - b \cdot i) \\
&= a^2 - ab \cdot i + ab \cdot i - b^2 \cdot i^2 \\
&= a^2 + b^2 \\
z : \overline{z} &= \frac{a + b \cdot i}{a - b \cdot i} \\
&= \frac{(a + b \cdot i)^2}{(a - b \cdot i)(a + b \cdot i)} \\
&= \frac{a^2 - b^2 + 2ab \cdot i}{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Vergleicht man Produkt und Quotienten zweier Zahlen mit denen ihrer konjugiert komplexen Zahlen so ergeben sich weitere bemerkenswerte Zusammenhänge.
Seien $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ und $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 \cdot i)(a_2 - b_2 \cdot i) \\
&= a_1 a_2 - a_1 b_2 \cdot i - a_2 b_1 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i \\
&= \overline{z_1 \cdot z_2} \\
\overline{z_1} : \overline{z_2} &= \frac{a_1 - b_1 \cdot i}{a_2 - b_2 \cdot i} \\
&= \frac{(a_1 - b_1 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i)}{(a_2 - b_2 \cdot i)(a_2 + b_2 \cdot i)} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - a_2 b_1 \cdot i + a_1 b_2 \cdot i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot i}{(a_2)^2 + (b_2)^2} \\
&= \overline{z_1 : z_2}
\end{aligned}$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie!
   a) i^{27}, i^{2016}, $(2i)^2$, $\left(\frac{2}{i}\right)^2$, $(2+i)^2$, $(2+i)^2-(2-i)^2$
   b) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}$, $\sqrt{-2}-\sqrt{-8}$, $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-8}$, $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}$, $(\sqrt{-2}+\sqrt{-8})^2$
   c) $\sqrt{-28}+\sqrt{-7}$, $\sqrt{-28}-\sqrt{-7}$, $\sqrt{-28}\cdot\sqrt{7}$, $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}$, $(\sqrt{-28}-\sqrt{-7})^2$
2. Entscheiden und begründen Sie, inwieweit folgende Aussagen wahr sind!
   a) Die Summe zweier imaginärer Zahlen ist stets wieder imaginär.
   b) Das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist stets wieder imaginär.
   c) Alle geradzahligen Potenzen aus einer imaginären Zahl sind reell.
3. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen!

   a) $2(x+3i)=2i$
   b) $2(x+3i)=4+2i$
   c) $x^2+2x=-3$
   d) $2x^2-6x+8=0$
   e) $x^2+5=1$
   f) $2x^2-3x+15=7$
   g) $x^{(-1)}+5=0$
   h) $x^{(-2)}+9=0$
   i) $x^4+4x^2-5=0$
4. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1=3-2i$, $z_2=2+3i$ und $z_3=-4+2i$.
   a) Berechnen Sie z_1+z_2, z_1+z_3, z_2+z_3, $z_1-z_2-z_3$!
   b) Berechnen Sie $z_1\cdot z_2$, $z_1\cdot z_3$, $z_2\cdot z_3$, $z_1\cdot(z_2-z_3)$!
   c) Berechnen Sie $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_3}$, $\frac{z_2}{z_3}$, $\frac{z_1-z_2}{z_3}$!
5. Untersuchen Sie, ob sich für das Produkt und den Quotienten aus zwei konjugiert komplexen Zahlen besondere Strukturen ergeben!
6. Gegeben ist die komplexe Zahl $z=1+i$. Berechnen Sie z^2, z^3, z^4 und z^5 und Stellen Sie die erhaltenen Potenzen in der Gaußschen Zahlenebene dar!
7. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1=5-2i$ und $z_2=-3+4i$. Berechnen Sie!

   a) $z_1\cdot z_2$
   b) $z_1\cdot\overline{z_2}$
   c) $\overline{z_1}\cdot z_2$
   d) $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
   e) $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$
   f) $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$
8. Untersuchen Sie, wie die n-te Potenz einer komplexen Zahl mit der n-ten Potenz ihrer konjugiert komplexen Zahl zusammenhängt!

2 Komplexe Zahlen in goniometrischer Form

2.1 Umwandlung zwischen kartesischer und goniometrische Form

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass es schwierig ist, Produkte, Potenzen und Quotienten komplexer Zahlen zu berechnen, wenn diese in kartesischer Form vorliegen. Deshalb suchen wir nun nach einer anderen Darstellungsmöglichkeit.
Zunächst betrachten wir die Gaußsche Zahlenebene.
Eine komplexe Zahl ist eindeutig durch ihre „Koordinaten“ a und b bestimmt. Andererseits ist sie auch durch den Winkel φ zur reellen Achse und ihren Betrag r festgelegt.
In der Abbildung sieht man, dass a, b und r ein rechtwinkliges Dreieck bilden. In diesem erkennt man leicht:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 + b^2 \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} \\ \cos\varphi &= \frac{a}{r} \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

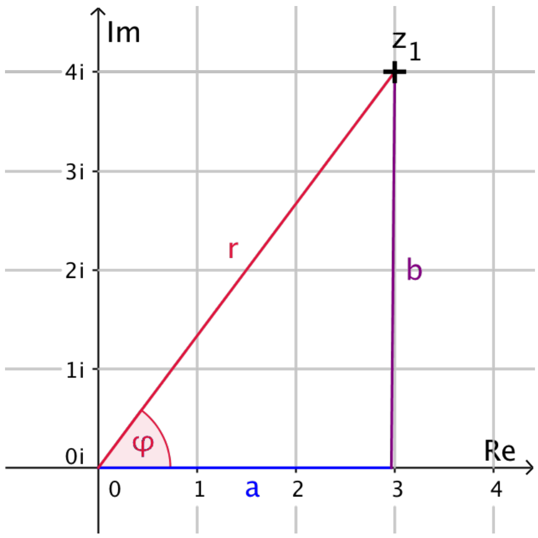

Abbildung 2.1: a, b, φ und r

Umformung der beiden letzten Gleichungen nach b und a führen zu:

$$\begin{aligned} b &= r \cdot \sin\varphi \\ a &= r \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

Damit könnte man die komplexe Zahl nun auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} z &= a + b \cdot i \\ &= r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i \\ &= r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \end{aligned}$$

Damit können wir nun festlegen:

Definition 2.1 *Gegeben sei eine komplexe Zahl z. Ihre Darstellung in der Form*

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

heißt ***goniometrische Form****. Dabei ist r der Betrag der komplexen Zahl z und φ das Argument der Zahl.*

Um von der arithmetischen Form auf die goniometrische Form zu kommen, müsste man aus a und b die Werte für r und φ bestimmen. Für r gibt es eine einfache Möglichkeit, nämlich:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bei der Bestimmung des Argumentes muss man zusätzlich zur Gleichung:

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$

noch beachten, in welchem Quadrant der Winkel φ liegt. Für jeden Wert $\tan\varphi$ gibt es im Bereich $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ zwei Winkel, die den Wert annehmen. An den Vorzeichen von a und b kann man den Quadranten und damit den Wert für das Argument der Zahl bestimmen.
Wir betrachten zwei Beispiele.
Gegeben sind die Zahlen:

$$z_1 = -2 - i$$

und

$$z_2 = -2 + 3i.$$

Für z_1 erhalten wir:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \\ \tan\varphi_1 &= \frac{(-1)}{(-2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Rechnerwert:

$$\varphi_R = 26,57^\circ.$$

Da $a < 0$ und $b < 0$ gilt, folgt:

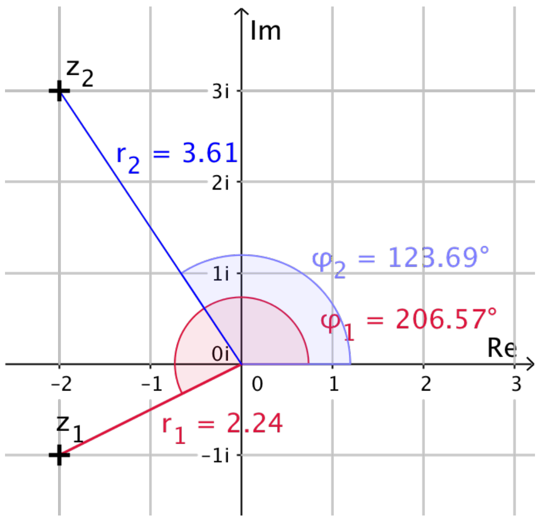

Abbildung 2.2: Argument und Betrag

$$\varphi_1 = 26,57^\circ + 180^\circ = 206,57^\circ.$$

Also ist z_1 in goniometrischer Form:

$$z_1 = \sqrt{5} \cdot (\cos 206,57^\circ + i \cdot \sin 206,57^\circ).$$

In ähnlicher Weise erhalten wir für die Zahl z_2:

$$\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \tan\varphi_2 &= \frac{3}{(-2)} = -\frac{3}{2} \\ \varphi_R &= -56,31^\circ \\ \varphi_2 &= -56,31^\circ + 180^\circ = 123,69^\circ \\ z_2 &= \sqrt{13} \cdot (\cos 123,69^\circ + i \cdot \sin 123,69^\circ). \end{aligned}$$

Natürlich können die Argumente auch im Bogenmaß angegeben werden. Die Umwandlung ist offensichtlich relativ aufwändig, wir werden jedoch noch sehen, dass sich der Aufwand lohnt, wenn man mit komplexen Zahlen rechnen möchte.
Natürlich ist auch die umgekehrte Umwandlung hin und wieder erforderlich. Diese ist aber vergleichsweise einfach, da man sich dazu einfach den beiden Gleichungen $a = r \cdot \cos\varphi$ und $b = rcdot \sin\varphi$ bedienen kann.
Im folgenden Beispiel ist die Umwandlung der Zahl $z = 4 \cdot (\cos 300° + i \cdot \sin 300°)$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
z &= 4 \cdot (\cos 300° + i \cdot \sin 300°) \\
a &= 4 \cdot \cos 300° = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\
b &= 4 \cdot \sin 300° = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) = -2\sqrt{3} \\
z &= 2 - 2\sqrt{3} \cdot i
\end{aligned}$$

2.2 Addition und Subtraktion in der goniometrischen Form

Wir haben oben gesehen, dass das Addieren und Subtrahieren in der kartesischen Form sehr einfach ist. Wie sieht es damit in der goniometrischen Form aus? Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel mit den Zahlen $z_1 = \sqrt{3} \cdot (\cos 30° + i \cdot \sin 30°)$ und $z_2 = 2 \cdot (\cos 120° + i \cdot \sin 120°)$.

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= \sqrt{3} \cdot (\cos 30° + i \cdot \sin 30°) + 2 \cdot (\cos 120° + i \cdot \sin 120°) \\
&= \sqrt{3} \cdot \cos 30° + \sqrt{3} \cdot i \cdot \sin 30° + 2 \cdot \cos 120° + 2 \cdot i \cdot \sin 120° \\
&= \left(\sqrt{3} \cdot \cos 30° + 2 \cdot \cos 120°\right) + \left(\sqrt{3} \cdot \sin 30° + 2 \cdot \sin 120°\right) \cdot i \\
&= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot i \\
&= 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot i
\end{aligned}$$

Wir sollten anhand des Beispiels folgende Schlüsse ziehen:

1. Die Addition und die Subtraktion komplexer Zahlen in der goniometrischen Form sind im Allgemeinen wesentlich komplizierter als in der kartesischen Form.

2. Rechnet man konkrete Beispiele aus, so erhält man beim Zusammenfassen der Terme die kartesische Form.

3. Es ist einfacher, erst die kartesische Form herzustellen und dann zu addieren oder zu subtrahieren.

Das Problem stellen hier die Winkelfunktionen dar, die sich eben nicht auf einfache Weise zu Winkelfunktionen eines neuen Winkels zusammenfassen lassen.

2.3 Multiplikation und Division in der goniometrischen Form

Wir wagen uns diesmal gleich an die allgemeine Form, gehen von zwei komplexen Zahlen

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$$

und

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$$

aus und betrachten das Produkt $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot\ r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\
&= r_1 r_2 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\
&= r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdot i + i \cdot \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) \\
&= r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)\right) \\
&= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)
\end{aligned}$$

In der Vereinfachung des Produktes wurden die Additionstheoreme für die Summe zweier Winkel angewendet.
Wir erkennen, dass in der goniometrischen Form des Produktes die Summe der Winkel der Faktoren den Winkel des Produktes und das Produkt der Beträge der beiden Faktoren den neuen Betrag bilden.

Satz 2.1 *Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in goniometrischer Form:*

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2).$$

Für das Produkt $z_1 \cdot z_2$ gilt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Der Betrag des Produktes ist gleich dem Produkt der Beträge der beiden Faktoren.
Das Argument des Produktes ist gleich der Summe der Argumente der beiden Faktoren.

Betrachten wir ein Beispiel.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{3} \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) \\
z_2 &= 2 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) \\
z_1 \cdot z_2 &= 2\sqrt{3}\,(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)
\end{aligned}$$

Das Produkt ist also sehr einfach zu berechnen, wenn die goniometrische Form vorliegt. Im Folgenden soll nun der Quotient betrachtet werden. Auch hier werden wir in der Umformung Additionstheoreme benutzen und den Bruch geschickt so erweitern, dass im Nenner die dritte Binomische Formel anwendbar wird. Dadurch vereinfacht sich der Nenner sogar zu 1.

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \\
z_2 &= r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \\
z_1 : z_2 &= \frac{r_1(cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1(cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - i \cdot \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_1 cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2}{(\cos\varphi_2)^2 + (\sin\varphi_2)^2} \\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))
\end{aligned}$$

Es ist damit gezeigt:

Satz 2.2 *Gegeben seien zwei komplexe Zahlen in goniometrischer Form:*

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2).$$

Für den Quotienten $z_1 : z_2$ gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \, .$$

Der Betrag des Quotienten ist gleich dem Quotienten der Beträge der beiden Zahlen. Das Argument des Quotienten ist gleich der Differenz der Argumente der beiden Zahlen.

Für unser Zahlenbeispiel würde sich ergeben:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{3} \cdot (\cos 30° + i \cdot \sin 30°) \\
z_2 &= 2 \cdot (\cos 120° + i \cdot \sin 120°) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos(-90°) + i \cdot \sin(-90°)) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos 270° + i \cdot \sin 270°) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} (0 + i \cdot (-1)) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i
\end{aligned}$$

Es entsteht eine rein imaginäre Zahl.

Darüber hinaus kann man zeigen, dass für die Multiplikation komplexer Zahlen das Kommutativ- und das Assoziativgesetz gilt.

Satz 2.3 *Seien z_1, z_2 und z_3 beliebige komplexe Zahlen. Dann gilt:*

1. *Kommutativgesetz:* $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. *Assoziativgesetz:* $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. *Distributivgesetz:* $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

2.4 Potenzen und Wurzeln

Schauen wir uns nun einige Potenzen einer komplexen Zahl an:

$$\begin{aligned}
z &= r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \\
z^2 &= r^2 \cdot (\cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi) \\
z^3 &= r^3 \cdot (\cos 3\varphi + i \cdot \sin 3\varphi) \\
z^4 &= r^4 \cdot (\cos 4\varphi + i \cdot \sin 4\varphi) \\
&\ldots \\
z^{(-1)} &= \frac{1}{r} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) \\
z^{(-2)} &= \frac{1}{r^2} \cdot (\cos(-2\varphi) + i \cdot \sin(-2\varphi)) \\
z^{(-3)} &= \frac{1}{r^3} \cdot (\cos(-3\varphi) + i \cdot \sin(-3\varphi)) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Auch hier eignet sich die goniometrische Schreibweise. Fassen wir für ganzzahlige Exponenten zusammen, so können wir schreiben:

Satz 2.4 *Sei $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ eine komplexe Zahl und k eine beliebige ganze Zahl. Dann gilt:*

$$z^k = r^k \cdot (\cos(k \cdot \varphi) + i \cdot \sin(k \cdot \varphi))$$

Interessant ist die Frage, wie sich das Radizieren komplexer Zahlen gestaltet. Dazu spezialisieren wir Satz 2.4 und erhalten für r = 1 und k = n den

Satz 2.5 *Satz von MOIVRE*

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)$$

Da die Winkelfunktionen periodisch sind, gilt der Satz auch für die Erweiterung der Argumente um beliebige Vielfache der Periodenlänge. Wir wechseln der Einfachheit halber ins Bogenmaß, wie es bei der Behandlung trigonometrischer Funktionen üblich ist.

Satz 2.6 *Verallgemeinerung zu Satz 2.5*

$$(\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i \cdot \sin(\varphi + k \cdot 2\pi))^n = \cos(n \cdot \varphi + n \cdot 2k\pi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi + n \cdot 2k\pi)$$

Nun sind alle Vorbereitungen getroffen, um eine Formel für die n-te Wurzel einer komplexen Zahl aufstellen zu können und diese zu beweisen.
Wenn sich die Gesetzmäßigkeiten, die wir zu den ganzzahligen Potenzen von z leicht zeigen konnten übertragen lassen, dann liegt es nahe zu vermuten, dass das Argument der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl auf den Bruchteil $\frac{\varphi}{n}$ reduziert wird und sich der Betrag auf den Wert $\sqrt[n]{r}$ ändert.

Satz 2.7 *Sei $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ Für $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ gilt:*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

mit $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$.
*Der Wurzelwert für $k = 0$ heißt auch **Hauptwert**.*

Zum Beweis des Satzes gehen wir von einer beliebigen n-ten Wurzel aus und zeigen, dass ihre n-te Poten z ergibt.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{z}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)^n \\ z &= \left(\sqrt[n]{r}\right)^n\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n \end{aligned}$$

Nun wenden wir den Satz 2.6 auf den Term rechts an:

$$\begin{aligned} z &= r\cdot\left(\cos\left(n\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)+i\cdot\sin\left(n\cdot\left(\frac{\varphi}{n}+k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right) \\ z &= r\cdot\left(\cos\left(\varphi+k\cdot 2\pi\right)+i\cdot\sin\left(\varphi+k\cdot 2\pi\right)\right) \\ z &= r\cdot\left(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi\right) \end{aligned}$$

Bemerkungen:
Es gibt stets n verschiedene n-te Wurzeln einer komplexen Zahl. Sie haben alle denselben Betrag, jedoch unterschiedliche Argumente.
Alle Lösungen der Gleichung $z^n = r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ liegen in der Gaußschen Zahlenebene stets auf einem Kreis um den Punkt O. Der Kreis hat den Radius $\sqrt[n]{r}$ und die Lösungen bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks.
Die im Satz angegebene Zahlenmenge für k liefert die n Lösungen, wenn k die Zahlen von 0 bis $n-1$ durchläuft. Für $k=n$ erhält man wieder den Hauptwert.
Einige Beispiele sollen nun das Bestimmen der n-ten Wurzeln zeigen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{27}{8}\left(\cos 135^\circ+i\cdot\sin 135^\circ\right) \\ z_{1,2,3} &= \sqrt[3]{\frac{27}{8}}\left(\cos(45^\circ+k\cdot 120^\circ)+i\sin(45^\circ+k\cdot 120^\circ)\right) \\ z_1 &= \frac{3}{2}\left(\cos 45^\circ+i\cdot\sin 45^\circ\right) \\ z_2 &= \frac{3}{2}\left(\cos 165^\circ+i\cdot\sin 165^\circ\right) \\ z_3 &= \frac{3}{2}\left(\cos 285^\circ+i\cdot\sin 285^\circ\right) \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind in der Gaußschen Koordinatenebene auf einem Kreis mit dem Radius r = 1.5 gleichmäßig verteilt. Bei einer dritten Wurzel ergibt sich zwischen zwei Lösungen stets der Winkel 120°.

Beispiel:
Die nebenstehende Grafik zeigt die vierten Wurzeln aus der Zahl $z = (-16)$. Ihr Betrag ist jeweils 2, denn $2^4 = 16$. Das Argument des Hauptwertes ist $180° : 4 = 45°$.
Selbst positive reelle Zahlen haben ab $n = 3$ komplexe Wurzeln. Lediglich der Hauptwert ist wieder eine reelle Zahl. Mit Hilfe des Satzes 2.7 können wir nun alle komplexen Wurzeln einer Zahl berechnen, beziehungsweise alle Gleichungen der Form $z^n = c$ durch Radizieren lösen.

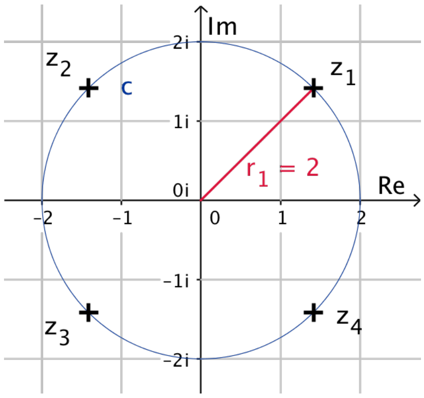

Abbildung 2.3: $\sqrt[4]{-16}$

Aufgaben

1. Ermitteln Sie zu den folgenden komplexen Zahlen jeweils die goniometrische Form!

   a) $z = 6 + 3i$
   b) $z = 2 - 5i$
   c) $z = -4 - 3i$
   d) $z = \frac{7}{3} + 2i$
   e) $z = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$
   f) $z = 3 - \frac{5}{4}i$

2. Bestimmen Sie jeweils die kartesische Form zu den folgenden Zahlen!

   a) $z = 4 \cdot (\cos 60° + i \sin 60°)$
   b) $z = 3 \cdot (\cos 150° + i \sin 150°)$
   c) $z = 2 \cdot (\cos 225° + i \sin 225°)$
   d) $z = 1 \cdot (\cos 320° + i \sin 320°)$

3. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2(\cos 40° + i \cdot \sin 40°)$ und $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 100° + i \cdot \sin 100°)$. Berechnen Sie:

   a) $z_1 \cdot z_2$
   b) $(z_1)^2$
   c) $(z_1)^4$
   d) $(z_2)^2$
   e) $(z_2)^3$
   f) $\frac{z_1}{z_2}$
   g) $\frac{z_2}{z_1}$
   h) $(z_1)^2 \cdot z_2$
   i) $(z_1)^{-4}$

4. Wandeln Sie in die goniometrische Form um und berechnen Sie! Geben Sie das Ergebnis wieder in kartesischer Form an!

   a) $(2 + i)^3$
   b) $(1 - 2i)^4 - (1 - 2i)^2$
   c) $(3 - 4i) \cdot (-5 + 2i)$
   d) $\frac{(-1-i)^2}{2+3i}$

5. Berechnen Sie und stellen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar!

   a) $\sqrt[3]{8i}$
   b) $\sqrt[5]{\cos 60° + i \cdot \sin 60°}$
   c) $\sqrt[6]{\sqrt{15 + 7i}}$
   d) $\sqrt{3 - 2i} \cdot \sqrt{2 + 3i}$
   e) $\sqrt[8]{256(\cos 144° + i \cdot \sin 144°)}$
   f) $z^6 - 12 = 0$

3 Komplexe Zahlen in exponentieller Form

3.1 Eulersche Formel

Mit Hilfe der Taylorreihen kann man sowohl die Exponentialfunktion e^x als auch die Winkelfunktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ nach x entwickeln. Man erhält dabei die Darstellungen:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Diese Entwicklungen waren zunächst für reelle Zahlen x aufgestellt worden. Lässt man nun jedoch auch imaginäre Exponenten $i \cdot x$ zu, so ergibt sich für die Exponentialfunktion folgender interessanter Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
e^{i \cdot x} &= 1 + \frac{i \cdot x}{1!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \frac{(i \cdot x)^4}{4!} + \frac{(i \cdot x)^5}{5!} + ... \\
&= 1 + \frac{i \cdot x}{1!} + \frac{i^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{i^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{i^4 \cdot x^4}{4!} + \frac{i^5 \cdot x^5}{5!} + ... \\
&= 1 + i \cdot x - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} \mp ... \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp ...\right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp ...\right) \\
&= \cos x + i \cdot \sin x
\end{aligned}$$

Damit ist eine sehr wichtige Beziehung zwischen Exponential- und Winkelfunktionen hergeleitet:

Satz 3.1 *Eulersche Formel*

$$\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i \cdot \varphi}$$

Setzt man $\varphi = \pi$, so erhält man eine der schönsten Formeln der Mathematik:

$$e^{i \cdot \pi} = (-1)$$

Interessant ist außerdem, dass die Exponentialfunktion im Bereich der imaginären Zahlen offenbar eine periodische Funktion mit komplexen Werten ist, da ja die Winkelfunktionen periodisch sind. Verallgemeinert man das Winkelargument so gilt also auch:

$$e^{i\cdot\varphi} = e^{i\cdot(\varphi+2k\pi)};\ k \in Z$$

Definition 3.1 *Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$ schreiben. Dabei ist r der Betrag der komplexen Zahl und φ der Winkel zur reellen Achse.*

Das Umwandeln von einer Form zur anderen ist über die Beziehungen zwischen r und φ mit a und b möglich, die wir bereits in Abschnitt 2 gesehen haben. Zwei Beispiele sollen die Umwandlung demonstrieren.

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} z &= -12 + 5i \\ r &= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{144+25} = 13 \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} = -\frac{5}{12} \Rightarrow\ \varphi = 157,4^\circ \\ z &= 13 \cdot (\cos 157,4^\circ + i \cdot \sin 157,4^\circ) \\ z &= 13 \cdot e^{i\cdot 157,4^\circ} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} z &= 5 \cdot e^{4,2\cdot i} \\ a &= 5 \cdot \cos 4,2 = -2,45 \\ b &= 5 \cdot \sin 4,2 = -4.36 \\ z &= -2,45 - 4,36 \cdot i \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene ist die Angabe der Winkel im Gradmaß sicherlich sinnvoll und hilfreich. Für Rechnungen mit komplexen Zahlen wird jedoch das Bogenmaß bevorzugt. Im Folgenden werden wir ebenfalls das Bogenmaß verwenden.

3.2 Rechnen in der Exponentialform

Ähnlich wie in der goniometrischen Form eignet sich die Exponentialform für die Multiplikation, die Division, das Potenzieren und das Radizieren deutlich besser als für die „Strichrechnung“. Grund sind die Potenzgesetze, wie an den folgenden Herleitungen leicht nachzuvollziehen ist. Zum Beweis des folgenden Satzes werden ausschließlich die Gesetze für das Rechnen mit Potenzen und Logarithmen angewendet.

Satz 3.2 *Gegeben seien zwei komplexe Zahlen durch* $z_1 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}$ *und* $z_2 = r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}$. *Dann gilt:*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{3.1}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \tag{3.2}$$

$$z^n = r^n \cdot e^{i\cdot\varphi\cdot n} \tag{3.3}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right)};\ k \in \{0;1;...;n-1\} \tag{3.4}$$

$$\ln z = \ln r + i \cdot (\varphi + k \cdot 2\pi);\ k \in Z;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{3.5}$$

Beweis:
zu (3.1):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 \cdot e^{(i\cdot\varphi_1 + i\cdot\varphi_2)} \\ &= r_1 r_2 \cdot e^{i\cdot(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

zu (3.2):

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(i\cdot\varphi_1 - i\cdot\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\cdot(\varphi_1-\varphi_2)} \end{aligned}$$

zu (3.3):

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{r \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot r \cdot e^{i\cdot\varphi} \cdot ... \cdot r \cdot e^{i\cdot\varphi}}_{n\ Faktoren} \\ &= r^n \cdot e^{i\cdot(\varphi+\varphi+...+\varphi)} \\ &= r^n \cdot e^{i\cdot\varphi\cdot n} \end{aligned}$$

zu (3.4):

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r \cdot e^{i\cdot\varphi}} \\ &= \sqrt[n]{r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)} \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\cdot\left(\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right)};\ k \in \{0;1;...;n-1\} \end{aligned}$$

zu (3.5)

$$\begin{aligned} \ln z &= \ln\left(r \cdot e^{i\cdot(\varphi+2k\pi)}\right) \\ &= \ln r + \ln\left(e^{(i\cdot(\varphi+2k\pi))}\right) \\ &= \ln r + i \cdot (\varphi + 2k\pi) \end{aligned}$$

Der Logarithmus ist also auch für negative Zahlen definiert, wenn man die komplexen Zahlen als Zahlenbereich zulässt.
Beispiele:

$$\begin{aligned} \ln(-1) &= \ln\left(e^{i\cdot(\pi+2k\pi)}\right) \\ &= i\cdot(\pi+2k\pi); \quad k\in Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln(-e) &= \ln e\cdot\left(e^{i\cdot(\pi+2k\pi)}\right) \\ &= \ln e + i\cdot(\pi+2k\pi) \\ &= 1+i\cdot(\pi+2k\pi); \quad k\in Z \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt einerseits, dass der Logarithmus aus einer negativen reellen Zahl komplex ist und andererseits dass er nicht eindeutig bestimmt ist. Für jedes ganzzahlige k erhält man eine komplexe Zahl, die Lösung der Gleichung ist.

Aufgaben

1. Wandeln Sie in die Exponentialform um!

   a) $4+3i$ c) $-7i$ e) $-4-4i$
   b) $2-5i$ d) -200 f) $-4+8i$

2. Wandeln Sie in die arithmetische Form um!

   a) $2\cdot e^{-2i}$ c) $7\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ e) $2\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}}$
   b) $e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}$ d) $3\cdot e^{i\cdot\frac{7\pi}{4}}$ f) $\frac{3}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{11\pi}{2}}$

3. Berechnen Sie, indem Sie die Exponentialform nutzen. Stellen Sie anschließend die arithmetische Form her! Beachten Sie, dass es beim Rechnen mit Wurzeln mehrere Fälle geben kann!

   a) $(2-3i)\cdot(2+3i)$ d) $(1-2i)^5$ g) $\ln(8i)$
   b) $\frac{12-5i}{5-12i}$ e) $\sqrt{3-4i}-\sqrt{4-3i}$ h) $\ln(\sqrt{-e^3})$
   c) $(3+2i)^3-(5-2i)^3$ f) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-2i}\cdot(1+i)$ i) $\ln(3+7i)$

4. Berechnen Sie für $z_1=1+i$ und $z_2=-2+i$ folgende Terme:

   a) $z=\frac{z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}$ c) $z=\ln\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$
   b) $z=\sqrt[4]{\frac{z_1}{z_2}}$ d) $z=\ln\sqrt{\frac{1+z_1}{1-z_1}}$

4 Lösen von Gleichungen

4.1 Lineare Gleichungen

Lässt man in einer Gleichung auch für die Parameter komplexe Zahlen zu, so sind beim Anwenden von Lösungsschritten und Verfahren grundsätzlich die Rechenregeln für komplexe Zahlen zu beachten. Die führt schon bei einfachen Gleichungen zu deutlich umfangreicheren Lösungswegen.
Betrachten wir zunächst die lineare Gleichung

$$az + b = 0.$$

Dabei sei $a = r_a \cdot e^{i\varphi_a}$ und $b = r_b \cdot e^{i\varphi_b}$.
Lösen wir die Gleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a \cdot z &= -b \qquad\qquad |:a \\
z &= \frac{-b}{a} \\
z &= \frac{r_b \cdot e^{i(\varphi_b+\pi)}}{r_a \cdot e^{i\varphi_a}} \\
z &= \frac{r_b}{r_a} \cdot e^{i\cdot(\pi+\varphi_b-\varphi_a)}
\end{aligned}$$

Jede lineare Gleichung hat in Bereich der komplexen Zahlen genau eine Lösung.

4.2 Quadratische Gleichungen

Gegeben sei eine quadratische Gleichung der Form

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0.$$

Dabei seien a, b und c zunächst reell. Wir können durch a dividieren und dann quadratisch ergänzen.

$$\begin{aligned}
z^2 + \frac{b}{a} \cdot z &= -\frac{c}{a} \\
z^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\
\left(z - \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun die Struktur der beiden Lösungen:

$$z_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Es ergeben sich genau drei Fälle:

1. $b^2 - 4ac > 0$
   Wir erhalten zwei reelle Lösungen.

2. $b^2 - 4ac = 0$
   Wir erhalten genau eine reelle Doppellösung: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

3. $b^2 - 4ac < 0$
   Wir erhalten zwei Lösungen die zueinander konjugiert komplex sind. Sie lauten:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(4ac - b^2) \cdot (-1)} \\ &= -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2} \end{aligned}$$

Damit ist nun jedes quadratische Polynom in genau zwei Linearfaktoren zerlegbar, wobei diese eben auch komplex sein können.

Beispiel:
Man bestimme die Linearfaktorzerlegung von $p(z) = z^2 - 8z + 25$.

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 25} \\ &= 4 \pm \sqrt{-9} \\ z_1 &= 4 - 3i \\ z_2 &= 4 + 3i \\ p(z) &= (z - 4 - 3i) \cdot (z - 4 + 3i) \end{aligned}$$

Nun verallgemeinern wir unsere Parameter auf den Bereich der komplexen Zahlen und betrachten die Gleichung: $z^2 + p \cdot z + q = 0$ für komplexe p, q. Jede allgmeine Gleichung kann mit Division durch a auf diese zurückgeführt werden. An der Lösungsformel

$$z_1, 2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

kann man sich leicht überlegen, dass die Lösungen nun nicht mehr konjugiert komplex liegen müssen, da sowohl $\frac{p}{2}$ als auch der Radikand der Wurzel komplex sind. Auch der Wurzelsatz des VIETA lässt sich auf komplexe Lösungen übertragen und kann manchmal hilfreich sein. Insbesondere bei Beispielen, in denen eine Lösung bekannt ist, kann mit seiner Hilfe die zweite Lösung leicht bestimmt werden. Er lautet.

Satz 4.1 *Sind z_1 und z_2 die beiden Lösungen einer quadratischen Gleichung der Form $z^2 + p \cdot z + q = 0$, dann gilt:*

$$z_1 + z_2 = -p$$

$$z_1 \cdot z_2 = q$$

Auch zu dieser Problematik betrachten wir ein Beispiel:
Gegeben seien eine quadratische Gleichung der Form $z^2 + pz + 19 - 87i = 0$. Sie hat die Lösung $z_1 = 6 - 5i$. Gesucht sind z_2 und die vollständige Gleichung.
Wir nutzen den Wurzelsatz des VIETA.
Lösung:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{q}{z_1} \\ &= \frac{19 - 87i}{6 - 5i} \\ &= \frac{(19 - 87i)(6 + 5i)}{36 + 25} \\ &= \frac{114 + 95i - 522i + 425}{61} \\ &= \frac{539 - 427i}{61} \\ &= 9 - 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= -z_1 - z_2 \\ &= -6 + 5i - 9 + 7i \\ &= -15 + 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 + (-15 + 12i)z + 19 - 87i &= 0 \\ (z - 6 + 5i)(z - 9 + 7i) &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Fundamentalsatz der Algebra

Verallgemeinert man die Erkenntnisse zu den Gleichungen 1. und 2. Grades, so gelangt man zu einem zentralen Satz der Algebra, der für Polynome n-ten Grades gilt.

Satz 4.2 *Das Polynom*

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$$

besitzt genau n komplexe Lösungen z_1, z_2, ..., z_n und lässt sich somit stets in genau n Linearfaktoren zerlegen. Dabei kann dieselbe Lösung auch mehrfach auftreten und wird dann auch mehrfach gezählt.

Der Satz sagt nur etwas darüber aus, dass diese Lösungen existieren. Das Ermitteln der Lösungen kann sich je nach Aufbau des Polynoms als sehr schwierig oder sogar unmöglich erweisen. Einfache Lösungsformeln gibt es schon ab $n = 3$ nicht mehr. Zum Lösen solcher Gleichungen kann man sich der bekannten Verfahrensweisen bedienen: Beispielsweise können Probierlösungen gesucht werden und das Polynom mittels Polynomdivision in seinem Grad entsprechend verkleinert werden. Manchmal sind auch geeignete Substitutionen hilfreich, wie sie bei biquadratischen Gleichungen Anwendung finden. Sind die

Koeffizienten des Polynoms reell und ist eine Lösung komplex, so ist auch die konjugiert komplexe zahl zur Lösung eine weitere Lösung. Auf diese Weise kann man oft gleich zwei Linearfaktoren abspalten.
Beispiel:

Faktorisieren Sie das Polynom: $p(z) = z^4 + 3z^3 - 17z^2 + 3z - 18$.

Lösung:

Durch Probieren findet man die Lösung: $z_1 = i$.
Damit ist wegen der reellen Koeffizienten auch $z_2 = -i$ eine Lösung.
Wir dividieren das Polynom durch: $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$.

$$\begin{aligned}
(z^4 + 3z^3 - 17z^2 + 3z - 18) : (z^2 + 1) &= z^2 + 3z - 18 \\
z^2 + 3z - 18 &= 0 \\
z_{3,4} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 18} \\
z_{3,4} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \\
z_3 &= 3 \\
z_4 &= -6
\end{aligned}$$

Wir erhalten: $p(z) = (z - i)(z + i)(z - 3)(z + 6)$.

Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

   a) $(2 + 3i) \cdot z = 5 - 4i$
   b) $4z + 6i = (1 + i) \cdot z - 3 - 2i$
   c) $3z^2 - 6z + 111 = 0$
   d) $z^3 - 2z = z^2 - 9z$
   e) $z^2 + (4 - 2i)z - 3 + 6i = 0$
   f) $z^2 - (2 + 4i)z + 12 = 0$

2. Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $z^2 + pz + q = 0$. Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Parameter oder Lösungen! geben Sie die Gleichung faktorisiert an!

   a) $z_1 = 2 + 4i$, $p = 4 - 6i$
   b) $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 7 - 3i$
   c) $p = 2i$, $z_1 = 3$
   d) $z_1 = 4 - i$, $q = 4 + i$
   e) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -3 - 2i$
   f) $p = 1 + i$, $q = 3 - 4i$

3. Zeigen Sie, dass $z = -2$ eine Nullstelle des Polynoms

   $$p(z) = z^3 + (6 - 2i)z^2 - (1 - 24i)z - 18 + 40i$$

   ist. Berechnen Sie die weiteren Nullstellen des Polynoms!

5 Anwendungen komplexer Zahlen

In der Mathematik kann man komplexe Zahlen verwenden, um Funktionen mit zwei Veränderlichen zu beschreiben. Besonders in der Physik gibt es zahlreiche weitere Anwendungsmöglichkeiten für komplexe Zahlen. Besonders in der Schwingungslehre und der Wechselstromtechnik eignen sich komplexe Zahlen zur mathematischen Beschreibung der physikalischen Vorgänge. Ein Beispiel soll dies zeigen.

Widerstände im Wechselstromkreis

Im Wechselstromkreis sind Stromstärke und Spannung veränderliche Größen. Sie verändern zeitlich periodisch ihren Betrag und sogar ihr Vorzeichen. Diese zeitliche Veränderung kann durch Winkelfunktionen beschrieben werden. Dabei gilt:

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$$

U_0 und I_0 sind die jeweiligen Amplituden (Maximalwerte) für Spannung und Stromstärke. Die Stromstärke und die Spannung haben zwar dieselbe Frequenz, haben aber nicht zum selben Zeitpunkt ihre Maximalwerte. Man sagt dazu dass sie phasenverschoben sind. Die Phasenverschiebung wird durch den Winkel φ beschrieben. Wenn man nun den Widerstand bestimmen möchte, so ist auch der reelle Widerstand von der Zeit abhängig:

$$r(t) = \frac{u(t)}{i(t)}$$

Führt man nun komplexe Werte für U mit $u(t) = U_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}$ und $i(t) = I_0 \cdot e^{i \cdot (\omega t - \varphi)}$ ein, so ergibt sich für den Quotienten:

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{i(t)} &= \frac{U_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}}{I_0 \cdot e^{i \cdot (\omega t - \varphi)}} \\ &= \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\omega t - i\omega t + i\varphi} \\ &= \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Interessant ist dabei, dass nun der Quotient nicht mehr von der Zeit abhängt. Man nennt diesen komplexen Widerstand:

$$Z = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi}$$

Impedanz.

Der Betrag der Impedanz ist

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0}$$

Die Veranschaulichung in der Gaußschen Zahlenebene zeigt die Zusammenhänge. Der Realteil von Z_0 entspricht dabei dem Wirkwiderstand R und der Imaginärteil dem Blindwiderstand X.
Bei einem **ohmschen Widerstand** ist die Phasenverschiebung $\varphi = 0$. Es ergibt sich:

$$Z_\Omega = Z_0 = \frac{U_0}{I_0}.$$

Befindet sich im Stromkreis eine Spule, so wird in ihr nach dem Induktionsgesetz eine Spannung induziert für die gilt:

$$u(t) = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

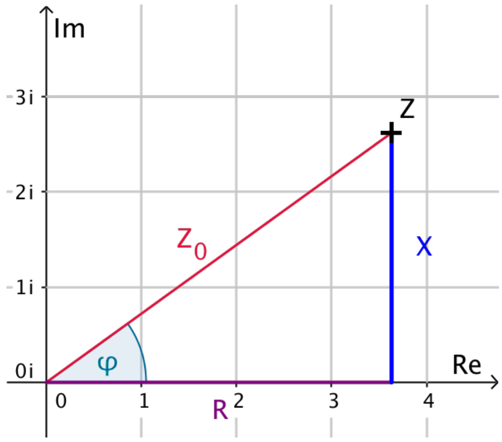

Abbildung 5.1: Wechselstromwiderstände

Dabei ist L die Induktivität der Spule. Setzen wir die Stromstärke ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{d}{dt}(I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ &= i \cdot \omega L \cdot I_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ &= i \cdot \omega L \cdot i(t) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung für die Impedanz ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_L &= \frac{i \cdot \omega L \cdot i(t)}{i(t)} \\ &= i \cdot \omega L = \omega \cdot L \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Wir haben also einen rein imaginären Widerstand erhalten. Somit beträgt für einen **induktiven Widerstand** die Phasenverschiebung also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und es gilt für den induktiven Blindwiderstand:

$$X_L = \omega L$$

Für einen Kondensator im Wechselstromkreis sind Spannung und Stromstärke ebenfalls phasenverschoben. Die Stromstärke ist die zeitliche Änderung der elektrischen Ladung:

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Die Ladung wiederum hängt von der Kapazität und der angelegten Spannung ab, wobei der Zusammenhang $Q = C \cdot u(t)$ gilt. Es folgt somit:

$$i(t) = \frac{d}{dt}(C \cdot u(t))$$

Ähnlich wie oben erhält man:

$$\begin{aligned} i(t) &= C \cdot \frac{d}{dt}(U_0 \cdot e^{i\omega t}) \\ &= i \cdot \omega C \cdot I_0 \cdot e^{i\omega t} \\ &= i \cdot \omega C \cdot u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_C &= \frac{u(t)}{i \cdot \omega C \cdot u(t)} \\ &= \frac{1}{i \cdot \omega C} \\ &= -\frac{1}{\omega C} \cdot i \end{aligned}$$

Bei einem rein **kapazitiven Widerstand** beträgt die Phasenverschiebung also $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, so dass man wieder einen rein imaginären Widerstand erhält, der aber entgegen dem induktiven negativ ausgerichtet ist. Es ist:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

Die in der Wechselstromtechnik verwendeten Zeigerdiagramme kann man also als Eintragungen in die Gaußsche Zahlenebene interpretieren.

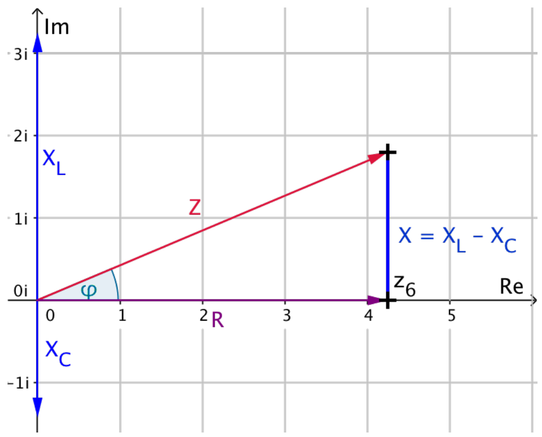

Abbildung 5.2: Zeigerdiagramm einer Reihenschaltung

Das Bild zeigt die Reihenschaltung eines ohmschen, eines induktiven und eines kapazitiven Widerstandes in einem in die Gaußsche Zahlenebene eingebetteten Zeigerdiagramm. Der Blindwiderstand X ist eigentlich die Summe aus X_L und X_C. Wenn man jedoch nur die Beträge betrachtet, kann man ihn auch als Differenz interpretieren. Ebenso könnte man jetzt induktive, ohmsche und kapazitive Widerstände in Reihe oder parallel schalten und die Gesetze für diese Schaltungen durch Rechnen mit komplexen Zahlen herleiten. Dies würde hier jedoch zu weit führen.
Im Bereich der harmonischen mechanischen und elektromagnetischen Schwingungen kann man mittels komplexer Zahlen und ihren Rechengesetzen sehr gut die Überlagerung phasenverschobener Schwingungen modellieren und zum Beispiel Resonanzfälle schwingender Systeme untersuchen.