Berechnungen mit dem Horner-Schema

Das Hornerschema kann als Rechenhilfsmittel zur Berechnung von Funktionswerten von Polynomfunktionen, zur Faktorisierung von Polynomen alternativ zur Polynomdivision genutzt werden. Mit etwas Übung ist man mit der Berechnung über das Hornerschema schneller als die Polynomdivision.

Vorbetrachtungen:

Das Hornersche Schema beruht auf folgender Zerlegung, die für jedes Polynom möglich ist:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\
&= (a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_2x + a_1)x + a_0 \\
&\dots \\
&= ((\dots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_2)x + a_1)x + a_0
\end{aligned}
$$

Wenn man also das Polynom an der Stelle x berechnen möchte, kann man beginnend von links nach rechts nur mit Multiplikation und Addition bis nach rechts „durchrechnen".

Beispiel:

$$p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 11x - 3 = ((2x + 5)x - 11)x - 3$$

$$p(2) = ((2\cdot 2 + 5)\cdot 2 - 11)\cdot 2 - 3 = 11$$
$$p(3) = ((2\cdot 3 + 5)\cdot 3 - 11)\cdot 3 - 3 = 63$$

Das Schema:

Wenn man die obige Berechnung tabellarisch aufschreibt, kann man folgendes Schema erhalten:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	
$x = x_0$		$b_n x_0$	$b_{n-1} x_0$	...		$b_1 x_0$
	$\mathbf{b_n} = a_n$	$\mathbf{b_{n-1}} = a_n x_0 + a_{n-1}$	$\mathbf{b_{n-2}} = b_{n-1} x_0 + a_{n-2}$	….	$\mathbf{b_1} = \dots$	$\mathbf{b_0 = b_1 x_0 + a_0 = p(x_0)}$
	Koeffizienten des neuen Polynoms vom Grad n-1					**Rest bzw. Wert an der Stelle x_0**

Was hier im ersten Anblick recht kompliziert aussieht, vereinfacht sich stark, wenn man konkrete Zahlen einsetzt.

Beispiel:

$p(x) = 2x^3 + 5x^2 – 11x – 3$

p	2	5	-11	-3
x = 2		2·2	9·2	7·2
p*	**2**	**9**	**7**	11

Interpretation der letzten Zeile:

(1) $p(2) = 11$

(2) $p^*(x) = 2x^2 + 9x + 7$

Beschreibung der Rechenschritte:

(1) Schreibe die Koeffizienten des Ausgangspolynoms in die erste Zeile des Schemas.
(2) Übernimm in der linken Spalte den ersten Koeffizienten.
(3) Multipliziere nun entlang des ersten Pfeiles mit x_0.
(4) Bilde die Summe in der zweiten Spalte.
(5) Multipliziere das Ergebnis mit x_0 (zweiter Pfeil) usw.
(6) Die letzte Zahl in der letzten Zeile ist der Funktionswert.
(7) Die anderen Zahlen sind die Koeffizienten des „Restpolynoms" p*.

Es gilt stets: $$p(x) – p(x_0) = p^*(x)\cdot(x – x_0)$$

Beispiel:

$p(x) = x^4 – 3x^3 + 5x – 2$ Probierlösung: $x = 2$

p	1	-3	0	5	-2
x = 2		2	-2	-4	2
p*	**1**	**-1**	**-2**	**1**	0

Interpretation der letzten Zeile:

(1) $p(2) = 0$ (Bestätigung der Nullstelle von p)

(2) $p(x) = (x^3 - x^2 - 2x + 1)(x - 2)$

Die erste Klammer des Ausdrucks (also p*) könnte nun ebenfalls mit dem Hornerschema weiter entwickelt und faktorisiert werden.

Beispiel zur mehrfachen Anwendung:

$p(x) = x^4 - 3{,}5x^3 - 2x^2 + 13{,}5x - 9$

p	1	-3,5	-2	13,5	-9
$x_1 = 1$		1	-2,5	-4,5	9
	1	-2,5	-4,5	9	0
$x_2 = -2$		-2	9	-9	
	1	-4,5	4,5	0	
$x_3 = 3$		3	-4,5		
	1	-1,5	0		

$p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - 1{,}5)$

weitere Anwendungen:

1. Zerlegung einer gebrochen rationalen Funktion

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $y = f(x) = \frac{x^3 - 6x}{x + 2}$. Bestimmen Sie die Gleichungen aller Asymptoten und asymptotischen Funktionen.

Lösung:

Die Polasymptote lautet offensichtlich: $x = -2$ (Hier wird nur der Nenner 0.)

Bestimmung der schrägen Asymptote mit dem Hornerschema:

Wir entwickeln den Zähler an der Stelle x = -2, denn hier wird der Nenner gerade 0.

z(x)	1	0	-6	0
$x_1 = -2$		-2	4	4
	1	-2	-2	4

Ergebnis: $y = f(x) = x^2 - 2x - 2 + \frac{4}{x+2}$

Die asymptotische Funktion ist eine quadratische Parabel mit:

$$y = a(x) = x^2 - 2x - 2$$

Man bemerkt bei diesem Beispiel, dass der Funktionswert des Zählers an der Stelle x_0 auch dem Zähler des Restgliedes entspricht. (hier 4).

Bemerkung:
Beachten Sie, dass diese Methode nur bei linearem Nenner so schnell funktioniert. Hat der Nenner höheren Grad, so wären nacheinander alle Nullstellen des Nenners zu entwickeln. In diesem Fall ist man mit Polynomdivision sicherlich schneller.

2. Bestimmung der Tangente t an eine Polynomfunktion im Berührungspunkt

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f mit:
$y = f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x - 7$ im Kurvenpunkt P(2; f(2)).

Lösungsidee:
Zur Lösung dieses Aufgabentyps kann man ausnutzen, dass sich bei zweimaliger Anwendung des Hornerschemas auch der Wert der Ableitung an der Stelle x direkt ergibt. Somit hat man nicht nur $y = f(x_0)$ sondern auch $m = f'(x_0)$ sofort bestimmt. Nach zweimaliger Anwendung für dasselbe x_0 erhält man rechts den Wert der ersten Ableitung.

Lösung:

Wir entwickeln die Funktion f zweimal nacheinander an der Stelle $x_0 = 2$:

f	-1	4	0	-3	-7
$x_1 = 2$		-2	4	8	10
	-1	2	4	5	3
$x_1 = 2$		-2	0	8	
	-1	0	4	13	

$f(2) = 3$; $f'(2) = 13$

Beide Werte kann man nun in die Tangentengleichung einsetzen:

$y = mx + n$: $3 = 13 \cdot 2 + n$

Daraus ergibt sich: $n = -23$
Und als Tangentengleichung: **y = 13x – 23.**

Bemerkung:
Es könnte sich nun die Frage stellen:
Wie sieht es mit der Berechnung von höheren Ableitungen aus?

Bereits bei der zweiten Ableitung erhält man nach dreimaliger Anwendung des Schemas nicht mehr direkt den Wert dieser, sondern nur noch die Hälfte des Wertes der zweiten Ableitung.
Prüfen Sie dies selbst anhand geeigneter Beispiele nach!