Einführung in die Graphentheorie

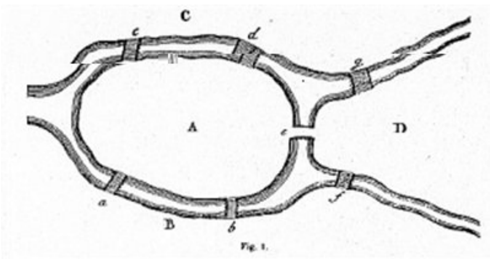
Unterrichtsinhalte und Beispiele

Olaf Schimmel

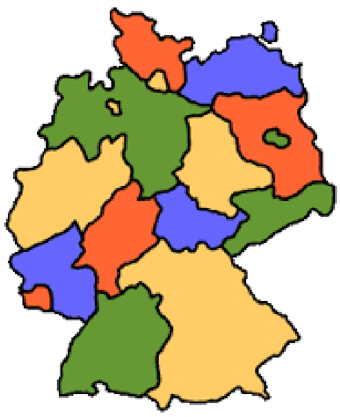
Vorbemerkungen

Die Graphentheorie ist eine Teildisziplin der Mathematik, die die Eigenschaften sogenannter Graphen untersucht. Einige historische mathematische Probleme könnte man der Graphentheorie zuordnen, so etwa das Königsberger Brückenproblem oder auch die Mehrfarbenprobleme.

In der damaligen Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) teilte sich der Fluss Pregel und es gab mehrere Brücken über die Flussarme. Dem schweizerischen Mathematiker Leonhard Euler wurde 1736 die Frage gestellt, ob es einen geschlossenen Rundweg von einem Ort aus gibt, bei dem man jede der sieben Brücken genau einmal überquert.



Mehrfarbenprobleme tauchten in der Drucktechnik auf. Hier entstand beispielsweise die Frage, wie viele Farben man mindestens benötigt, um eine Landkarte so einzufärben, dass keine zwei aneinander grenzende Länder gleichfarbig gefärbt sind. Das Problem geht zurück auf Francis Guthrie, der 1852 versuchte, eine Landkarte für die englischen Provincen unter diesen Bedingungen zu erstellen. Wie viele Farben man wirklich mindestens benötigt, wurde erst Ende des letzten Jahrhunderts bewiesen.



Heute spielt die Graphentheorie auch in vielen Bereichen des täglichen Lebens eine wichtige Rolle. Beispielsweise könnte man beliebige Netzwerke als Graphen interpretieren und mit den Methoden der Graphentheorie untersuchen. Ein weiteres wichtiges Anwendungsgebiet ist die Navigationstechnik.

1 Graphen und ihre Bestandteile

Def 1.1

*Eine Menge von Punkten und Linien, die jeweils zwei dieser Punkte verbinden, heißt **Graph**.*

*Die Punkte heißen **Knoten** des Graphen.*

*Die Linien heißen **Kanten** des Graphen.*

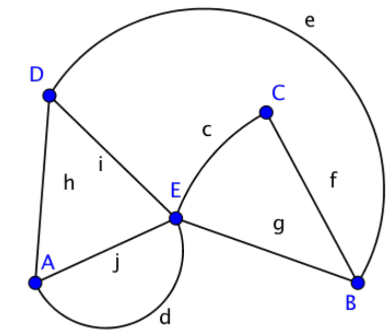
*Vollständig von Kanten und Konten eingeschlossene Flächen heißen **Gebiet** des Graphen.*

Beispiel 1 Knotenmenge:

$$V = \{A; B; C; D; E\}$$

Kantenmenge:

$$E = \{c; d; e; f; g; h; i; j\}$$

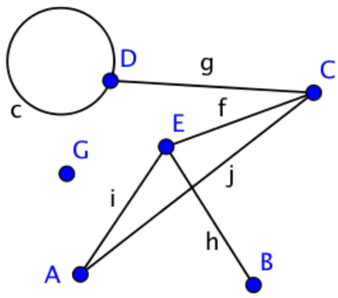


Beispiel 2 Knotenmenge:

$$V = \{A; B; C; D; E; G\}$$

Kantenmenge:

$$E = \{c; f; g; h; i; j\}$$

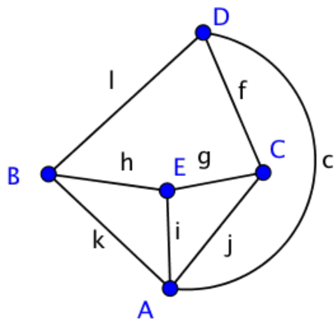


Beispiel 3 Knotenmenge:

$$V = \{A; B; C; D; E\}$$

Kantenmenge:

$$E = \{c; f; g; h; i; j; k; l\}$$



Bemerkung:
Kanten werden manchmal auch in Mengenschreibweise angegeben und nicht explizit bezeichnet. Im Beispiel 3 würde man auch schreiben: $k = \{A, B\}$.

Def 1.2

*Ein einzelner, isolierter Knoten heißt **Insel**.*

Def 1.3

*Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen **benachbart**.*

Def 1.4

*Eine Kante, die von einem Knoten zu demselben Knoten führt, heißt **Schlinge**.*

Def 1.5

*Zwei Kanten, die dieselben Knoten miteinander verbinden, heißen **parallel**.*

Def 1.6

*Ein Graph heißt **planar**, wenn er sich so in einer Ebene zeichnen lässt, dass sich keine Kanten überschneiden.*

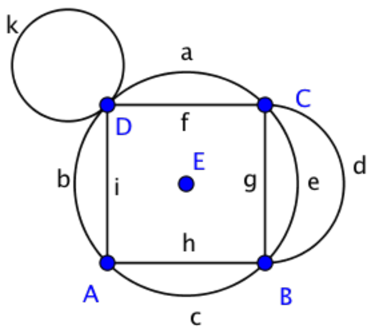
Def 1.7

*Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er weder Schlingen, noch parallele Kanten enthält.*

Beispiel 4 Knotenmenge:

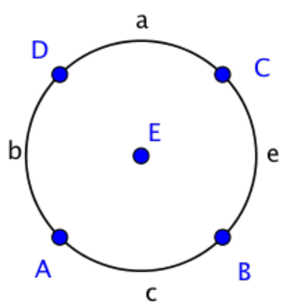
$$V = \{A; B; C; D; E\}$$

Insel: E
Schlinge: $k = \{D, D\}$
parallele Kanten:
$a \parallel f$; $b \parallel i$; $h \parallel c$ und $d \parallel e \parallel g$



Ein schlichter Graph, der aus dem obigen hervorgegangen ist.

Beide Grapen sind planar.



2 Der Knotengrad und seine Eigenschaften

Def 2.1

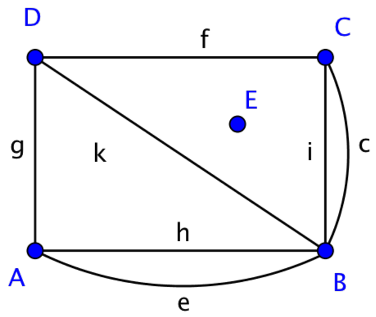
*Die Anzahl der in einem Knoten K ankommenden Kanten heißt **Knotengrad** deg(K).*

Beispiel 1 Knotengrade:

$$deg(A) = 3$$
$$deg(B) = 5$$
$$deg(C) = 3$$
$$deg(D) = 3$$
$$deg(E) = 0$$

Summe:

$$s_K = 14$$

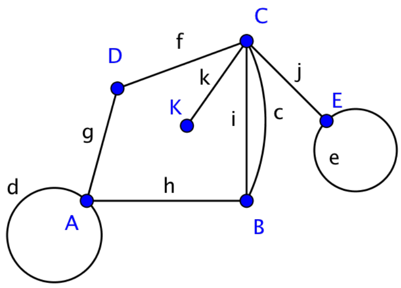


Beispiel 2 Knotengrade:

$$deg(A) = 4$$
$$deg(B) = 3$$
$$deg(C) = 5$$
$$deg(D) = 2$$
$$deg(E) = 3$$
$$deg(K) = 1$$

Summe:

$$s_K = 18$$



Bemerkung: Bei einer Schlinge wird jedes Ende der Schlinge gezählt.

Satz 2.1

Sei G_n ein beliebiger Graph mit n Knoten $K_1, K_2, K_3, ..., K_n$ und sei e die Anzahl seiner Kanten. Dann gilt für die Summe der Knotengrade:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} deg(K_i) = 2e$$

Dabei ist

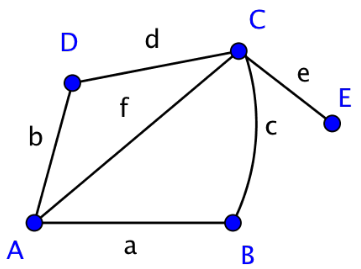
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} deg(K_i) = deg(K_1) + deg(K_2) + ... + deg(K_n)$$

Der Satz sagt aus, dass die Summe aller Knotengrade jedes Graphen immer gleich der doppelten Kantenanzahl ist. Dies wollen wir nun begründen.

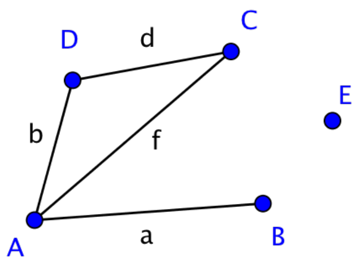
Beweis: Wir zählen Knoten für Knoten die Anzahl der Kanten, die am Knoten ankommen. Da jede Kante genau zwei Knoten verbindet, wird sie bei dieser Prozedur genau zweimal gezählt. Eine Schlinge wird an demselben Knoten genau zweimal gezählt. Damit muss die Summe aller Knotengrade genau dem doppelten der Zahl der vorkommenden Kanten entsprechen.

Aufgabe: Zeichnen Sie mindestens drei verschiedene schlichte Graphen.
Untersuchen Sie, welche Knotengrade darin vorkommen.
Formulieren Sie Aussagen über den Knotengrade, die für alle Ihre Graphen zutreffen.

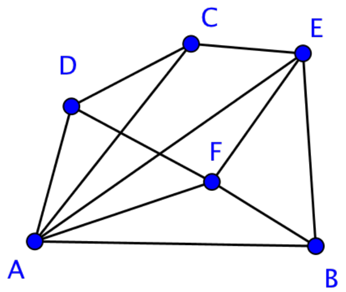
Lösungen:



$deg(A) = 3$
$deg(B) = deg(D) = 2$
$deg(C) = 4$
$deg(E) = 1$



$deg(A) = 3$
$deg(B) = 1$
$deg(C) = deg(D) = 2$
$deg(E) = 0$



$deg(A) = 5$
$deg(B) = deg(C) = deg(D) = 3$
$deg(E) = deg(F) = 4$

Ergebnisse: Der maximal vorkommende Knotengrad ist kleiner als die Anzahl der Knoten.
Mindestens ein Knotengrad kommt mindestens zweimal vor.

Satz 2.2

In jedem schlichten Graphen mit n Knoten beträgt der maximal mögliche Knotengrad $n-1$.

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen Graphen mit n Knoten.
Wir wählen einen der n Knoten und zeichnen zu jedem anderen Knoten genau eine Kante. Da es genau n-1 andere Knoten gibt, sind auf diese Weise $n-1$ Kanten möglich.
Jede weitere Kante würde entweder zu einem Knoten führen, zu dem bereits eine Kante führt und wäre damit eine Parallele.
Sie würde eine Schlinge sein, wenn sie zum selben Knoten führt.
In beiden Fällen würde die Schlichtheit des Graphen verloren gehen.
Damit kann der maximale Knotengrad höchstens $n-1$ betragen.

Satz 2.3

In jedem schlichten Graphen G_n *kommt mindestens ein Knotengrad mindestens zweimal vor.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt.
Annahme:
Es gibt einen schlichten Graphen mit n Knoten, die n verschiedene Knotengrade haben.

Aus Satz 2.2 wissen wir, dass maximal der Knotengrad $n-1$ vorkommen kann.
$\Rightarrow$
Wenn es also n verschiedene Knotengrade geben soll, dann können dies nur die Knotengrade: $0; 1; 2; ...; (n-1)$ sein, von denen jeder vorkommen muss.
$\Rightarrow$
Es muss also der Knotengrad $n-1$ vorkommen. Das heißt aber: Es gibt einen der n Knoten, der mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.
$\Rightarrow$
Dann aber kann es keinen Knoten mit dem Knotengrad 0 geben.

Damit besteht ein Widerspruch zur Annahme.
Die Annahme war also falsch. Es muss also mindestens ein Knotengrad (mindestens) doppelt vorkommen.

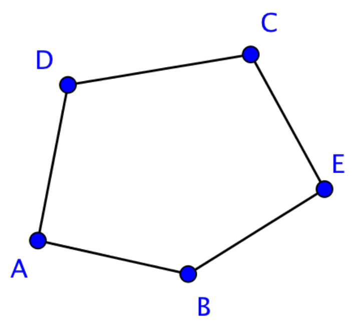
3 Reguläre und vollständige Graphen

Def 3.1

Ein Graph heißt ***regulär*** *genau dann, wenn alle Knoten des Graphen denselben Knotengrad haben.*

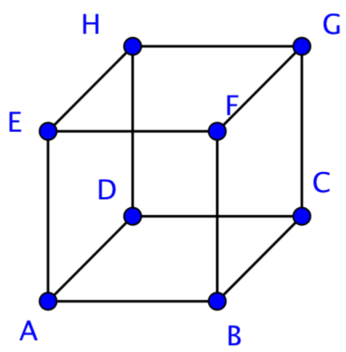
Beispiel 1

Jeder Knoten hat den Knotengrad 2.
Der Graph ist regulär.
Einen solchen Graphen nennt man auch **quadratisch**.



Beispiel 2

Jeder der acht Knoten hat den Knotengrad 3.
Der Graph ist damit regulär.
Einen solchen Graphen nennt man auch **kubisch**.



Aufgaben:

1. Zeichnen Sie einen kubischen Graphen mit sechs Knoten.

2. Begründen Sie, warum es keinen kubischen Graphen mit genau fünf Knoten gibt.

3. Zeichnen Sie alle möglichen regulären Graphen, mit folgenden Eigenschaften:
   (A) Der Graph ist schlicht.
   (B) Der Graph besitzt genau sechs Knoten: $K_1; K_2; ...; K_6$.
   (C) Der Graph ist regulär.

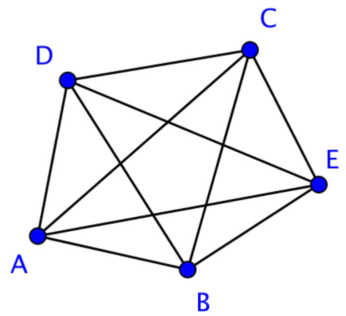
4. Zeichnen Sie alle möglichen regulären Graphen, bei denen die Summe der Knotengrade 24 beträgt. Erläutern Sie Ihr Vorgehen, um alle zu finden.

5. Wie viele verschiedene reguläre Graphen mit genau 2017 Knoten sind möglich? Begründen Sie ihre Entscheidung.

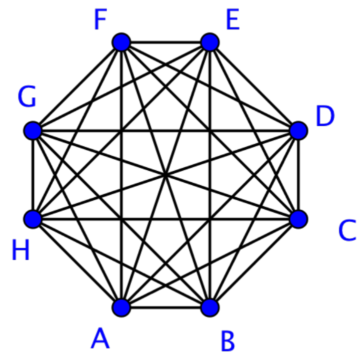
Def 3.2

Ein schlichter Graph, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten benachbart ist, heißt ***vollständig****.*

Beispiel 3 Jeder Knoten hat den (für einen schlichten Graphen mit 5 Knoten maximal möglichen) Knotengrad 4. Der Graph ist regulär.



Beispiel 4 Jeder der acht Knoten hat den Knotengrad 7. Der Graph besitzt 28 Kanten.
Er erinnert an ein Achteck mit all seinen Diagonalen.



Aufgabe:
Zeichnen Sie vollständige Graphen mit 2; 3; ...; 7 Knoten. Ermitteln Sie in jedem der gezeichneten Graphen die Kantenanzahl und halten sie diese in einer geeigneten Tabelle fest.
Wir finden:

Knotenanzahl	Knotengrad	Kantenanzahl
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21

Unsere Ergebnisse halten wir in dem folgenden Satz fest.

Satz 3.1

Jeder vollständige Graph mit n Knoten hat genau $e_n = \frac{1}{2} \cdot n(n-1)$ *Kanten.*

Beweis: Wir betrachten einen vollständigen Graphen mit n Knoten. Nun bilden wir die Summe aller Knotengrade. Sie beträgt:

$$S_n = n(n-1)$$

da jeder Knoten den Knotengrad $(n-1)$ hat.

$\Rightarrow$

Nach Satz 2.1 ist diese aber genauso groß wie das Doppelte der Kantenanzahl. Folglich gilt:

$$2e_n = n(n-1)$$

Dividiert man durch 2, so erhält man die Behauptung des Satzes.

Wir haben bereits bemerkt, dass vollständige Graphen mit Vielecken vergleichbar sind, in die alle möglichen Diagonalen eingezeichnet wurden. Wenn man also von der Kantenanzahl e_n des vollständigen Graphen, die Seitenanzahl n des n-Ecks subtrahiert, erhält man die Diagonalenanzahl d_n des n-Ecks. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} d_n &= e_n - n \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) - n \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - n \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - 3n) \\ &= \frac{1}{2}n(n-3) \end{aligned}$$

Satz 3.2

Für die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck gilt: $d_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$

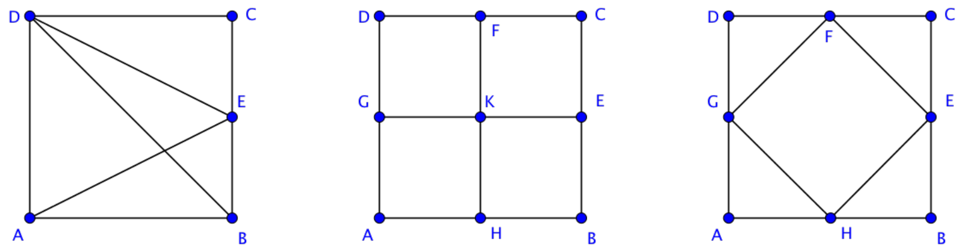
Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Anzahl der Diagonalen in einem 2017-Eck.
2. Untersuchen Sie, obe es ein n-Eck mit genau 100 Diagonalen gibt.
3. Welches ist das erste n-Eck, welches mehr als 100 Diagonalen hat?
4. In einer WM-Qualifikationsgruppe spielt jede der acht Mannschaften gegen jede andere genau zweimal. Wie viele Spiele werden bestritten?

4 Kantenzüge, Wege und Rundwege

Beispiele: Beantworten Sie für die Graphen die folgenden Fragen:

1. Kann man den Graphen mit einem Zug zeichnen? Wenn ja, wo muss man beginnen und wo enden?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
3. Wie viele Wege gibt es von A nach B?

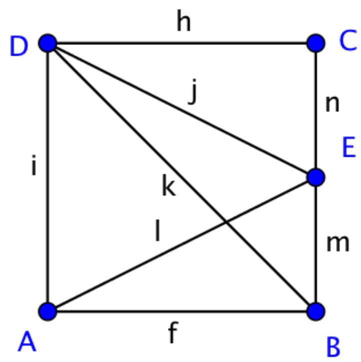


Um diese und ähnliche Fragen auch für andere Graphen beantworten zu können, brauchen wir noch einige Begriffe.

Def 4.1

*Jede endliche Abfolge von Knoten und Kanten in einem Graphen heißt **Kantenfolge**. Die Anzahl der Kanten heißt in einem ungewichteten Graphen Länge der Kantenfolge.*

Beispiel:



Kantenfolgen von A nach B:

AfB; Länge: 1
AlEmB; Länge: 2
AlEnChDkB; Länge: 4
AlEjDhCnEjDkB; Länge: 6

Bemerkung:
Sowohl Knoten als auch Kanten dürfen beliebig oft vorkommen. Da in schlichten Graphen die Kanten eindeutig bestimmt sind, kann man hier die Namen der Kanten weglassen.

Def 4.2

Wenn keine Kante mehrfach vorkommt, heißt eine Kantenfolge ***Kantenzug****.*

Def 4.3

Wenn kein innerer Knoten mehrfach vorkommt, heißt eine Kantenfolge ***Weg***

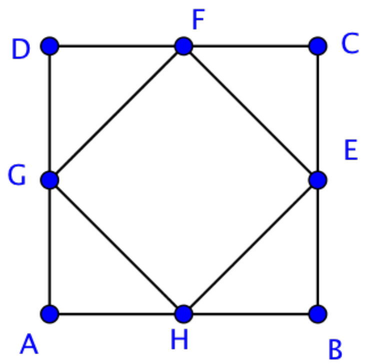
Def 4.4

Ein Kantenzug/Weg heißt ***vollständig****, wenn er alle Kanten/Knoten des Graphen enthält.*

Def 4.5

Ein Kantenzug/Weg heißt ***geschlossen****, wenn Anfangs- und Enknoten identisch sind.*

Beispiele:



Kantenfolge von A nach B: AGFDGFEB

Kantenzug von A nach B: AGFDGHEB

Weg von A nach B: AGFCEB

vollständiger, geschlossener Kantenzug (Eulerzug): AHBECFDGHEFGA

Dieser ist kein Weg.

Rundweg von A nach A: AHBEFGA

Bemerkung:
Ein Graph lässt sich genau dann ohne Absetzen vollständig zeichnen, wenn es einen vollständigen Kantenzug in ihm gibt.

Aufgaben:

1. Geben Sie zu den beiden ersten Graphen eingangs dieses Abschnittes mehrere Kantenfolgen, Kantenzüge und Wege von B nach D an.

2. Untersuchen Sie, ob es in den obigen Graphen vollständige Kantenzüge gibt. Sind diese auch geschlossen?

3. Emil behauptet: „Wenn in einem Graphen jeder Knoten einen geraden, positiven Knotengrad hat, dann gibt es in ihm einen vollständigen, geschlossenen Weg.“ Untersuchen Sie, ob diese Behauptung wahr ist!

4. In welchen vollständigen Graphen gibt es geschlossene vollständige Kantenzüge?

Satz 4.1

Gegeben sei ein beliebiger Graph mit den Knoten A und B. Dann gilt:
Jede Kantenfolge von A nach B enthält auch einen Weg von A nach B.

Beweis: Gegeben sei eine Kantenfolge:

$$AK_1K_2...K_{j-1}K_jB$$

Wenn in ihr kein Knoten doppelt vorkommt, ist es bereits ein Weg.

Wenn es ein Paar gleicher Knoten gibt, so streichen wir alle Knoten dazwischen und den doppelten Knoten einmal aus der Kantenfolge heraus. Daraus entsteht in jedem Falle eine neue, kürzere Kantenfolge.

Ist in dieser kein Knoten mehr doppelt vorhanden, liegt ein Weg vor. Wenn doch, verfahren wir erneut wie im Schritt zuvor.

Auf diese Weise entsteht nach endlich vielen Schritten eine Kantenfolge, in der kein Knoten mehr doppelt vorkommt, also ein Weg.

Satz 4.2

Gegeben sei ein beliebiger zusammenhängender Graph ohne Inseln. Dann gilt:

Es gibt genau dann einen vollständigen geschlossenen Kantenzug (Eulerzug), wenn jeder Knoten einen geraden Knotengrad hat.

Es gibt genau dann einen vollständigen, nicht geschlossenen Kantenzug, wenn der Graph genau zwei Knoten mit ungeradem Knotengrad besitzt.

Begründung: Um zu einem Knoten zu gelangen und ihn wieder zu verlassen, sind genau zwei Kanten erforderlich. Jeder Knoten mit dem Knotengrad $\{2; 4; 6; ...\}$ kann also $\{1; 2; 3; ...\}$ mal als Durchgangsknoten genutzt werden.

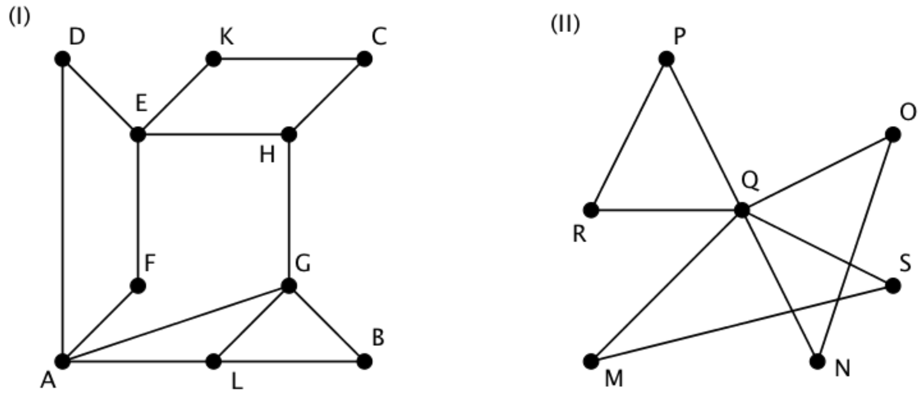
Wenn alle Knoten einen geraden Knotengrad haben, sind alle als Durchgangsknoten möglich und der Anfangsknoten muss auch der Endknoten sein.

Wenn genau zwei Knoten einen ungeraden Knotengrad besitzen, ist einer von ihnen der Anfangsknoten und der andere der Endknoten. alle anderen haben gerade Knotengrade und sind Durchgangsknoten. Somit ist ein vollständiger Kantenzug möglich, jedoch kein geschlossener.

Somit sind alle möglichen Fälle betrachtet und die Richtigkeit des Satzes begründet.

Aufgaben:

1. Gegeben sind die beiden Graphen (I) und (II) im Bild.



   a) Weisen Sie nach, dass im Graphen (I) vollständige Kantenzüge möglich sind. Geben Sie mindestens einen von ihnen an.

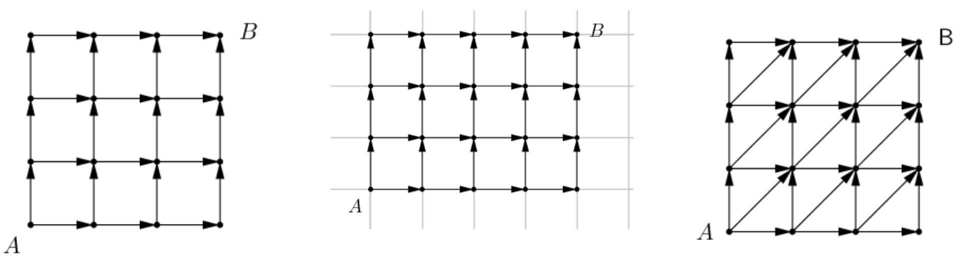
   b) Begründen Sie, dass es im Graphen (I) keinen vollständigen, geschlossenen Kantenzug geben kann.

   c) Untersuchen Sie, ob es im Graphen (I) einen vollständigen Weg gibt.

   d) Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen geschlossenen vollständigen Kantenzüge mit dem Startpunkt M.

2. Zeichnen Sie einen schlichten Graphen ohne Inseln mit genau vier Knoten. Dabei sollen drei verschiedene Knotengrade vorkommen. Untersuchen Sie für den gezeichneten Graphen, ob es darin einen vollständigen Kantenzug (einen vollständigen Weg) gibt.

3. Finden Sie für die folgenden gerichteten Graphen heraus, wie viele Wege es von A nach B gibt.



5 Brücken und Zusammenhang

Def 5.1

Ein Graph heißt ***zusammenhängend*** *bzw. Nachbarschaftsgraph, wenn es von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten einen Weg gibt.*

Def 5.2

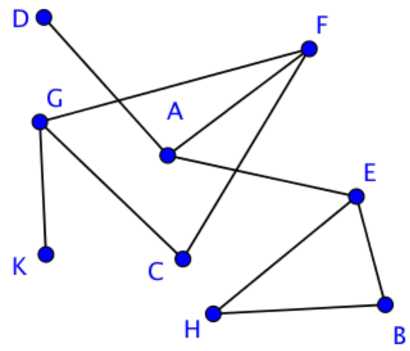
Eine Kante heißt ***Brücke****, wenn durch das Entfernen der Kante der Zusammenhang des Graphen verlorengeht.*

Def 5.3

Ein Graph, der keine Brücken besitzt, heißt ***anhangslos****.*

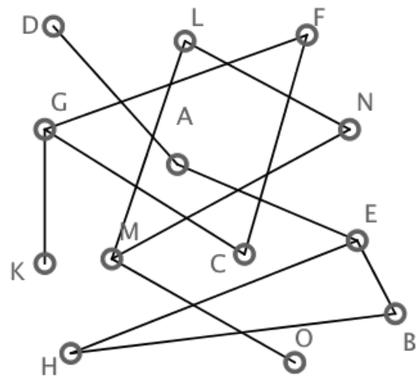
Beispiel 1

Dieser Graph ist zusammenhängend, doch er hat mehrere Brücken. Die Kanten AD und GK sind Brücken, weil ohne sie die Inseln D und K entstehen würden.
Die Kanten AE und AF sind ebenfalls Brücken, denn ohne sie würde der Graph in zwei Teilgraphen zerfallen.



Beispiel 2

Dieser Graph besitzt die Brücken: AD, AE, GK und MO.
Außerdem ist er nicht zusammenhängend, denn es gibt beispielsweise keinen Weg von B nach G.
Es gibt drei Teilgraphen: DAEBH; LMNO und CFGK
Wie aber findet man in komplexen Graphen heraus, ob sie zusammenhängend sind oder nicht?

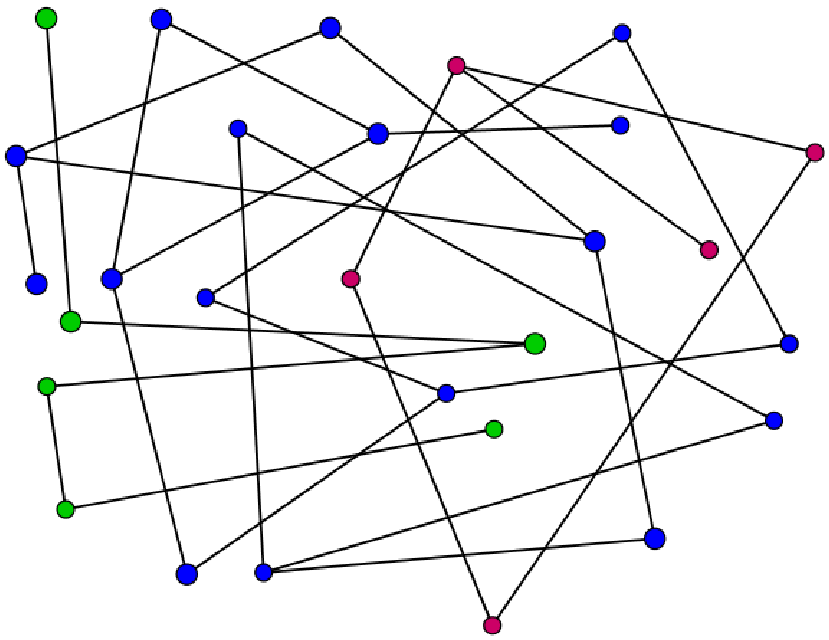


Bemerkung:
Folgender leicht nachvollziehbarer Algorithmus erlaubt es, in endlich vielen Schritten herauszufinden ob ein Graph zusammenhängend ist:

1. Wähle einen Knoten und markiere ihn. (z.B. mit einer Farbe)
2. Färbe alle zum markierten Knoten benachbarten Knoten.
3. Prüfe ob alle Knoten markiert sind. Wenn nicht, markiere erneut alle zu bereits markierten benachbarten Knoten.
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3, bis sich kein Knoten mehr markieren lässt.

Sind alle Knoten markiert, ist der Graph zusammenhängend, sonst nicht.

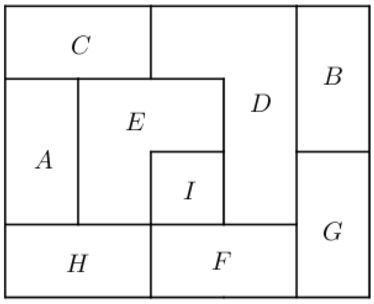
Beispiel 3: Das Beispiel zeigt einen komplexeren Graphen, bei dem das Verfahren angewendet wurde.



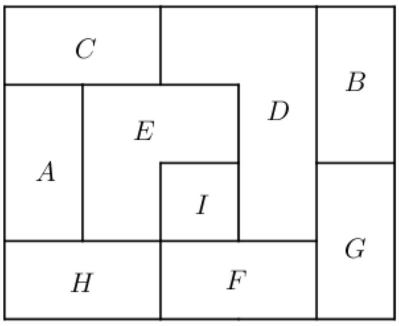
6 Färbungen in Graphen

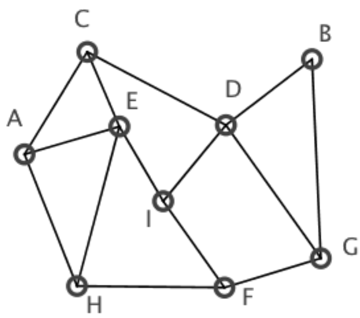
6.1 Knotenfärbungen und das Vierfarbenproblem

Wir kommen nun auf unser Problem der Färbung von Landkarten zurück. Die Landkarte im nebenstehenden Bild soll regulär gefärbt werden. Das bedeutet, dass keine zwei „Länder“ die ein Stück Grenze gemeinsam haben, dieselbe Farbe erhalten sollen. Wie viele Farben braucht man dazu mindestens?



Zunächst vermutet man, dass das Problem graphentheoretisch zur Färbung von Gebieten führt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Wenn man nämlich die „Länder“ als Knoten interpretiert und die Eigenschaft benachbart zu sein, als Kante zwischen zwei Knoten, dann erhält man zur Karte den folgenden Graphen.





Interpretiert man die Problemstellung in der neuen Konstellation, dann geht es also darum, dass zwei benachbarte Knoten immer verschiedenfarbig sein müssen und insgesamt eine minimale Farbanzahl vorkommen soll. Eine solche Färbung der Knoten eines Graphen wollen wir regulär nennen.
Wie viele Farben benötigen wir für die reguläre Färbung des obigen Graphen?

Def 6.1

Eine Knotenfärbung heißt regulär, wenn benachbarte Knoten stets verschiedene Farben besitzen.

Für vollständige Graphen ist das Problem relativ leicht zu beantworten.

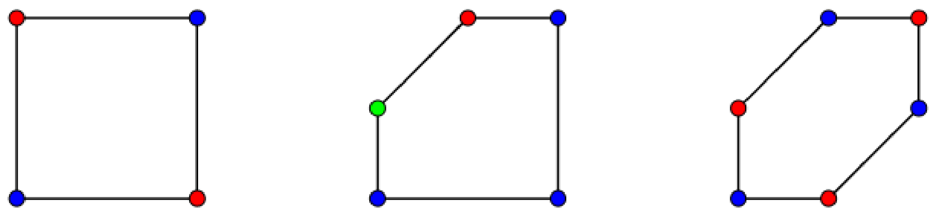
Satz 6.1

In jedem vollständigen Graphen mit n Knoten benötigt man für eine reguläre Knotenfärbung n verschiedene Farben.

Begründung: Gegeben sei ein vollständiger Graph mit n Knoten. Der erste Knoten habe die Farbe f_1. Da jeder andere Knoten mit ihm benachbart ist, kann es keinen weiteren Knoten mit dieser Farbe f_1. geben. Der zweite Knoten habe die Farbe f_2. Auch dieser ist mit allen anderen benachbart. f_2 kann ebenfalls nicht noch einmal vorkommen.

u.s.w. Keine Farbe kann mehr als einmal auftreten. Insgesamt kommen also n verschiedene Farben vor.

Wir wollen nun die Knotenfärbung quadratischer Graphen untersuchen.



Wir stellen fest:

Satz 6.2

In jedem quadratischen Graphen benötigt man für eine reguläre Knotenfärbung zwei Farben, wenn die Knotenanzahl gerade ist und drei Farben, wenn sie ungerade ist.

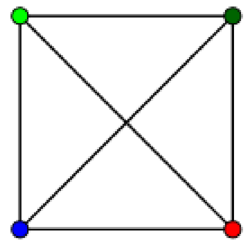
Begründung: Gegeben sei ein quadratischer Graph mit n Knoten. Wir färben nun abwechselnd mit zwei Farben seine Knoten. Dies geht solange, bis n-1 Knoten gefärbt sind und ein Knoten übrig ist. Für dieser übrige Knoten ist mit dem ersten und dem (n-1)-ten Knoten benachbart.

Wenn n-1 ungerade ist, haben diese beiden Knoten dieselbe Farbe und der n-te Knoten kann mit der anderen Farbe gefärbt werden. In diesem Fall, also bei geradem n reichen zwei Farben.

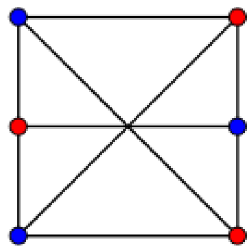
Wenn n-1 gerade ist, haben der erste und der (n-1)-te Knoten verschiedene Farben. Dann muss aber der n-te Knoten eine dritte Farbe erhalten.

Wie sieht es mit der Knotenfärbung kubischer Graphen aus? Gibt es auch hier eine so leicht zu findende Antwort?

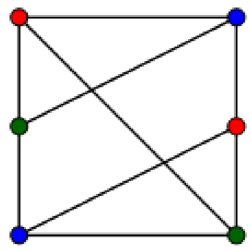
Unser erster Graph ist vollständig und kubisch. Da er vier Knoten besitzt, wissen wir aus Satz 6.1, dass man vier Farben für eine reguläre Färbung benötigt.



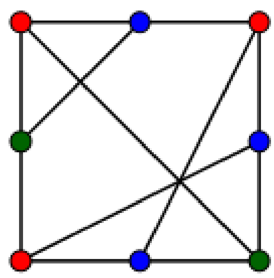
Unser zweiter kubischer Graph besitzt 6 Knoten. Hier sind die Knoten so verbunden, dass man mit zwei Farben auskommt. Jeder Knoten ist mit drei Knoten gleicher Farbe verbunden.



Für diesen Graphen mit ebenfalls sechs Knoten benötigt man drei Farben. Jeder Knoten ist mit drei Knoten verbunden, die insgesamt zwei Farben aufweisen.



Auch bei acht Knoten können bereits drei Farben für eine reguläre Färbung ausreichen.



Satz 6.3

In jedem kubischen Graphen beträgt die Anzahl der benötigten Farben für eine reguläre Knotenfärbung höchstens vier.

Begründung: Gegeben sei ein kubischer Graph mit n Knoten. Wir betrachten einen beliebigen Knoten. Er ist mit genau drei anderen Knoten benachbart. Diese haben maximal drei verschiedene Farben. Also reicht eine vierte Farbe, um ihn zu färben.

6.2 Kantenfärbung und SNARK-Graphen

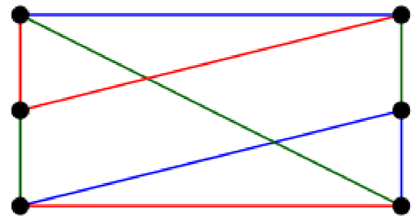
Def 6.2

Gegeben sei ein beliebiger Graph. Eine Zuordnung, die jeder Kante des Graphen eine Farbe zuordnet, heißt ***Kantenfärbung*** *des Graphen.*

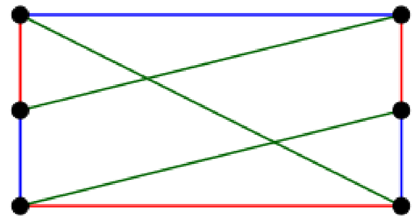
Def 6.3

Eine Kantenfärbung heißt ***regulär*** *genau dann, wenn alle Kanten, die zu demselben Knoten führen, verschiedenfarbig sind.*

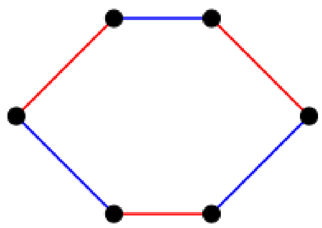
Beispiel 1: Kantenfärbung eines Graphen mit 6 Knoten.
Diese Kantenfärbung ist nicht regulär.

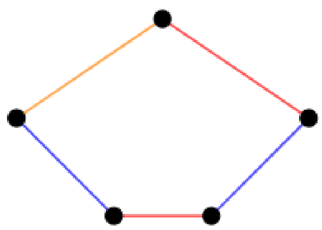


Kantenfärbung desselben Graphen, diesmal regulär. Man kommt mit drei Farben aus.



Aufgabe:
Untersuchen Sie, wie viele Farben man für die reguläre Färbung beliebiger quadratischer Graphen mindestens benötigt.





Satz 6.4

Für quadratische Graphen gilt. Die Mindestanzahl n der Farben, die man für eine reguläre Kantenfärbung benötigt, ist von der Knotenanzahl abhängig.
Bei gerader Knotenanzahl beträgt $n = 2$.
Bei ungerader Knotenanzahl beträgt $n = 3$.

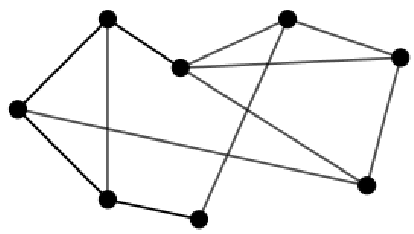
Wir wollen nun spezielle Graphen näher untersuchen, die in Anlehnung an eine Ballade von Lewis Carroll „The Hunting Of The Snark“ SNARK-Graphen genannt werden. Nach ihnen suchten im 19. und 20. Jahrhundert mehrere Mathematiker und es dauerte einige Jahre, die von der Veröffentlichung der Problemstellung bis hin zur Entdeckung der ersten Lösung vergingen.

Def 6.4

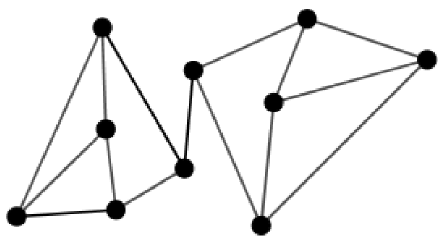
*Wenn ein Graph die folgenden Eigenschaften besitzt, heißt er **SNARK-Kandidat**:*

1. *Der Graph ist schlicht. (S)*
2. *Der Graph ist ein Nachbarschaftsgraph (zusammenhängend). (N)*
3. *Der Graph ist anhangslos, d.h. frei von Brücken. (A)*
4. *Der Graph ist regulär. (R)*
5. *Der Graph ist kubisch (K)*

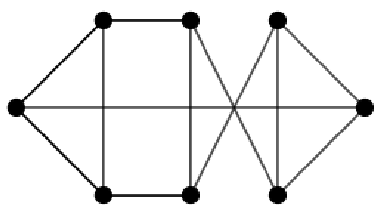
Beispiel: Dieser Graph hat nur die Eigenschaften S, A und N.
Er ist nicht regulär und auch nicht kubisch, da es verschiedene Knotengrade gibt.



Der nebenstehende Graph besitzt alle Eigenschaften außer dass er anhangslos ist. Es gibt genau eine Brücke.



Ein SNARK-Kandidat.



Die Problemstellung war nun folgende:
Wie viele Farben benötigt man höchstens, um einen SNARK-Kandidaten regulär zu färben? Es war lange Zeit unklar, ob drei Farben ausreichen würden. Wenn man mit drei

Farben nicht auskommt, wenn man also mindestens vier Farben benötigt, so soll der gefundene Graph SNARK-Graph heißen.

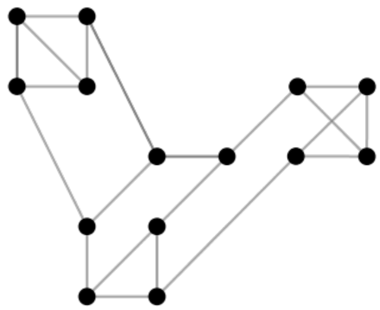
Def 6.5

*Ein SNARK-Kandidat, zu dessen regulärer Färbung man mindestens vier Farben benötigt, heißt **SNARK-Graph**.*

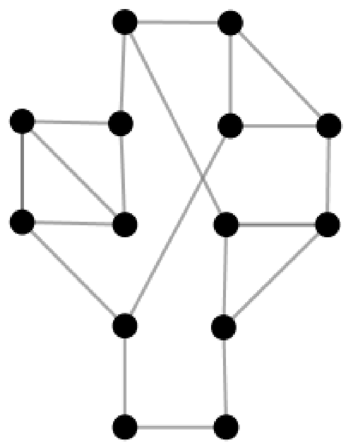
Aufgaben:

1. Prüfen Sie, ob die folgenden Graphen SNARK-Kandidaten sind. Begründen Sie bei den Graphen, die keine sind. Nehmen Sie anschließend eine reguläre Färbung mit möglichst wenigen Farben vor.

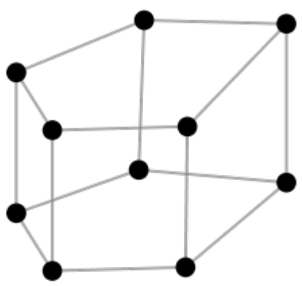
a)



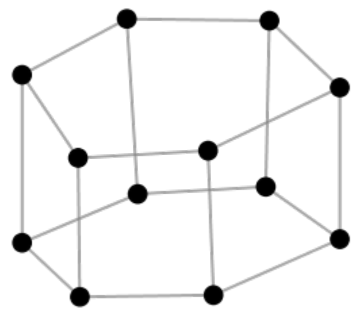
b)



c)



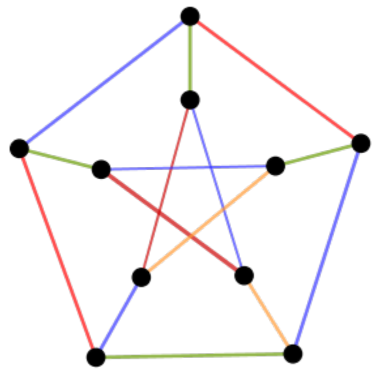
d)



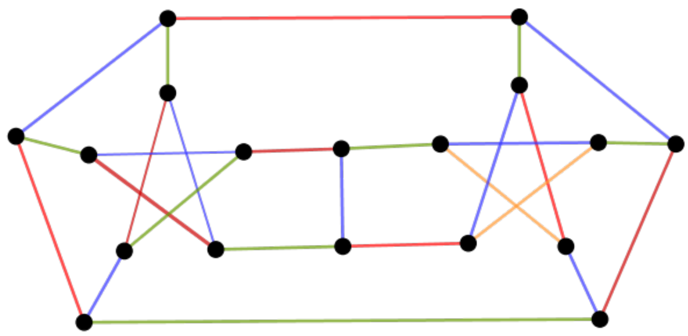
2. Zeichnen sie selbst mindestens fünf SNARK-Kandidaten und prüfen Sie, ob ein SNARK-Graph unter ihnen ist.

3. Man bezeichnet einen SNARK-Kandidaten als Ringgraph, wenn er aus einem inneren und einem äußeren n-Eck besteht, die miteinander durch Kanten verbunden sind. Zeichnen Sie Ringgraphen mit 6; 8; 10; 12 und 14 Knoten und prüfen Sie, ob es unter ihnen einen SNARK-Graphen gibt.

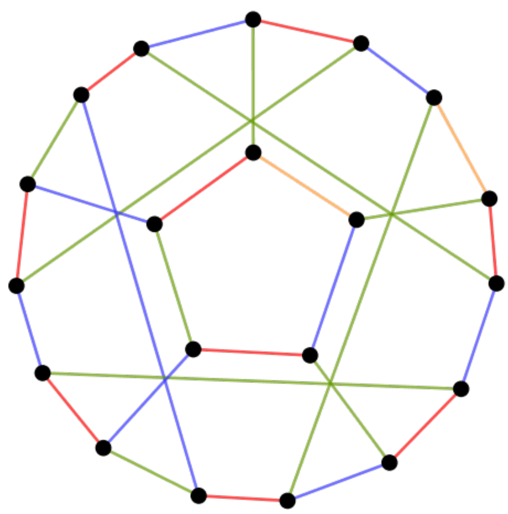
Es dauerte seit Veröffentlichung des Problemes der Kantenfärbung über zehn Jahre, bis der erste SNARK-Graph gefunden wurde. Julius Petersen veröffentlichte 1891 den Petersen-Graph. Er hat nur zehn Knoten. Petersen konnte auch beweisen, dass es keine reguläre Kantenfärbung mit nur drei Farben für ihn gibt.



Bis 1946 wurde kein weiterer SNARK gefunden, bevor Danilo Blanusa entdeckte zwei solche mit 18 Knoten entdeckte. Auch in ihnen tauchen wieder die Diagonalen von Fünfecken auf.



Bis in die 70er-Jahre des letzten Jahrhunderts blieben die SNARK-Graphen Raritäten. 1975 bewies der amerikanische Mathematiker Rufus Isaac, dass es unendlich viele SNARK-Graphen gibt. Er zeigte, dass es unendlich viele Blumen-SNARK's gibt. Einer davon ist hier zu sehen.



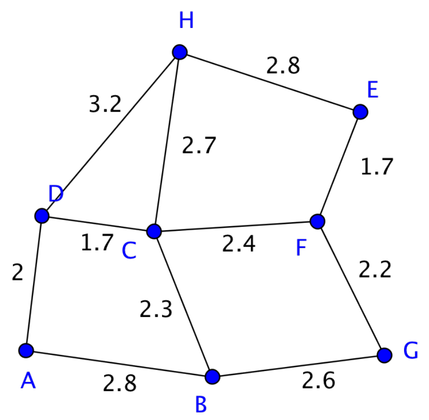
7 Gewichtete Graphen

7.1 Begriffe rund um gewichtete Graphen

Def 7.1

Ein Graph heißt ***gewichtet*** *wenn man jeder Kante des Graphen eine reelle Zahl zuordnet. Diese Zahl wird auch als* ***Gewicht*** *bzw. als* ***Länge*** *der Kante bezeichnet.*

Beispiel: Jede Kante des Graphen ist mit einer reellen Zahl gekennzeichnet. Diese muss nicht der geometrischen Länge der Kante entsprechen, sondern kann In der Praxis auch eine andere Bedeutung haben.



Man bestimme die Länge aller Wege von A nach E!

Wir notieren alle Wege und berechnen jeweils die Länge:

ABCDHE	$l = 12,8$	ABCFE	$l = 9,2$
ABCHE	$l = 10,6$	ABGFCDHE	$l = 17,7$
ABGFCHE	$l = 15,5$	ABGFE	$l = 9,3$
ADCBGFE	$l = 12,5$	ADCFE	$l = 7,8$
ADCHE	$l = 9,2$	ADHCBGFE	$l = 16,7$
ADHCFE	$l = 12$	ADHE	$l = 8$

In der Praxis werden als Gewichte der Kanten oftmals Streckenlängen, zulässige Höchstgeschwindigkeiten oder auch Fahrzeiten zugeordnet. Durch Untersuchung solcher Graphen finden Navigationssysteme beispielsweise die kürzeste oder auch die schnellste Verbindung zwischen zwei Orten. Wie aber finden Sie die schnellste Route so schnell.

7.2 Dijkstra-Algorithmus zum Finden minimaler Wege

Der Dijkstra-Algorithmus sucht in einem Graphen den Weg zwischen einem Startknoten und einem Endknoten, der das kleinste Kantengewicht hat. Dabei verfolgt er schrittweise immer nur den minimalen Weg weiter. Der Algorithmus wurde nach Edsger W. Dijkstra (1930 - 2002) benannt und spielt auch in der Informatik eine wichtige Rolle.

Def 7.2

Gegeben sei ein gewichteter Graph, ein Startknoten A und ein Endknoten E. Die folgende Schrittfolge zum Ermitteln eines kürzesten Weges heißt Dijkstra-Algorithmus.

1. *Bestimme alle Weglängen zu allen benachbarten Knoten.*
2. *Merke den Pfad und die Weglänge, solange die letzten Knoten verschieden sind.*
3. *Sind zwei letzte Knoten gleich, so streiche den Pfad mit dem längeren Weg.*
4. *Beginne von vorn.*
5. *Ist der Endknoten erreicht, können alle bereits längeren Wege gelöscht werden, doch die kürzeren werden entsprechend der Schrittfolge weiterverfolgt.*
6. *Im Ergebnis wird der kürzeste Weg gefunden.*

Für den Graphen im obigen Bild werden wir nun den Dijkstra-Algorithmus nun anwenden. Es empfiehlt sich eine tabellarische Form.

Beispiel:	Stufe	Pfad	Länge	Entscheidung
	I	AB	2,8	
		AD	2	
	II	ABC	5,1	entfällt, da > ADC
		ABG	5,4	
		ADC	3,7	
		ADH	5,2	
	III	ABGF	7,6	entfällt, da > ADCF
		ADCF	6,1	
		ADCH	5,4	entfällt, da > ADH
		ADHE	8,0	Endpunkt erreicht
	IV	ADCFE	7,8	minimaler Weg
		ADCHE	8,0	entfällt, da > 7,8