Kalenderrechnen

Olaf Schimmel

13. November 2015

1 Vorbemerkungen

Immer mal wieder begegnet man Menschen, die mit scheinbar erstaunlichen Gedächtnisleistungen beeindrucken. In der Mathematik ist es häufig das Kopfrechnen, das staunende Gesichter hervorrufen kann. Sei es das Multiplizieren mehrstelliger Zahlen miteinander, das Ziehen von Quadrat- oder höheren Wurzeln aus mehrstelligen Zahlen oder eben auch das Bestimmen des Wochentages zu einem beliebigen Datum. Beschäftigt man sich etwas genauer mit dem Hintergrund derartiger Aufgaben, so kann man doch manche interessante Lösungsstrategie erkennen. Mit diesem kleinen Beitrag möchte ich dem interessierten Leser nahebringen, wie man durch einige wenige Rechnungen, die mit ein wenig Training durchaus auch ohne Hilfsmittel ausführen kann, den Wochentag zu einem bestimmten Datum bestimmen kann. Ich möchte aber nicht dabei stehen bleiben, nur ein Rezept dafür anzugeben, sondern auch den Hintergrund dazu beleuchten, warum all das auf diese Weise funktioniert. Dabei werde ich mich auf möglichst einfache Gesetzmäßigkeiten beschränken. Betrachten wir als Beispiel das Datum:

25.07.2037

Auf welchen Tag wird dieses Datum fallen?
Eine einfache Summenbildung die sich aus den Zahlen des Datums ergibt, lautet:

$$4 + 0 + 0 + 4 = 8$$

Zum Ergebnis dieser Summe passt der Wochentag: Sonnabend. Man möge nachschlagen und wird tatsächlich herausfinden, dass der gesuchte Wochentag ein Sonnabend ist. Offenbar besteht die kleine Summe aus vier Summanden:

$$A + B + C + D = W$$

Wie aber kommt man zu den vier Summanden? Und wie schließt man von der Summe 8 auf den Samstag? All diese Fragen möchte ich in diesem kleinen Artikel nun beantworten.

2 Die Ermittlung der Tageszahl A

Eine Woche hat genau 7 Tage. Wenn beispielsweise der 3. eines Monats auf einen Dienstag fällt, werden auch der 10., der 17., der 24. und gegebenenfalls der 31. des Monats ein Dienstag sein. Alle diese Zahlen lassen bei der Division durch 7 denselben Rest, nämlich 3. Man sagt dazu auch: 3, 10, 17, 24 und 31 liegen alle in derselben Restklasse bezüglich des Moduls 7. Die Mathematiker schreiben dann auch:

$$\begin{aligned} 10 &\equiv 3 \quad (7) \\ 17 &\equiv 3 \quad (7) \\ 24 &\equiv 3 \quad (7) \\ 31 &\equiv 3 \quad (7) \end{aligned}$$

Um es kurz zu machen, hat der erste Summand A in obiger Rechnung genau diese Bedeutung. Er gibt den Rest der Datumszahl bei Division durch 7 an. Deshalb gilt in unserem Beispiel:

$$25 \equiv 4 \quad (7)$$

und damit

$$A = 4$$

3 Die Monatszahl B

Der zweite Summand, also B in unserer Rechnung steht für die Monatszahl. Dazu legt man zunächst für den Monat Januar eine beliebige Zahl fest. Aus Gründen, auf die weiter unten eingegangen wird, legen wir hier für den Januar B = 1 fest. Ausgehend von dieser Zahl ergeben sich nun die weiteren Monatszahlen für alle 12 Monate. Der Januar hat 31 Tage. Das sind vier Wochen und drei Tage. Beim Übergang vom Januar zum Februar "wandertälso der Wochentag um drei Tage weiter. Anders gesagt: Wenn der 8. Januar ein Mittwoch ist, dann ist in demselben Jahr der achte Februar ein

$$Sonnabend = Mittwoch + 3\ Tage$$

Deshalb erhält der Februar die Monatszahl:

$$B = 1 + 3 = 4$$

In einem normalen Jahr - der Einfluss von Schaltjahren wird erst später berücksichtigt - hat der Februar 28 Tage. 28 ist ohne Rest durch 7 teilbar. Die Monatszahl wandert also beim Übergang von Februar zum März nicht weiter. Also wird für März die Zahl

$$B = 4$$

übernommen. Der März hat 31 Tage. Nach den gleichen Überlegungen wie beim Monat Januar ergäbe sich somit für April:

$$B = 4 + 3 = 7$$

Nun ist aber die Zahl 7 bereits wieder durch 7 teilbar. Deshalb verwenden wir für B die Zahl 0:

$$4 + 3 = 7 \equiv 0 \quad (7)$$

$$B = 0$$

Setzt man diese Überlegungen für die folgenden Monate fort, so kann man die Zahlen B in der folgenden Tabelle übersichtlich festhalten:

Monat B	Jan 1	Feb 4	März 4
Monat B	Apr 0	Mai 2	Juni 5
Monat B	Juli 0	Aug 3	Sep 6
Monat B	Okt 1	Nov 4	Dez 6

Diese Ziffern lassen sich übrigens leicht merken, denn in den ersten drei Zeilen der Tabelle tauchen mit 144, 025 und 036 bekannte Quadratzahlen auf. Deshalb auch die Wahl der Ziffer 1 für den Januar. In unserem Beispiel suchen wir die Monatszahl für den Juli und erhalten also

$$B = 0$$

4 Die Zahl für das Jahrhundert C

Um die Zahl für das Jahrhundert zu ermitteln, gehen wir von folgenden Überlegungen aus:

1. Ein Jahr hat 365 Tage. Die Zahl 365 lässt bei Division durch 7 den Rest 1. Pro Jahr wandert also der Wochentag desselben Datums in der Regel um einen Tag weiter. In einem Jahrhundert wären das also 100 Tage.

2. In einem Jahrhundert gibt es in der Regel 24 Schaltjahre, denn nur alle 400 Jahre ist das Jahr zwei Nullen am Ende auch ein Schaltjahr. So haben wir also beim Sprung auf das 17., das 21. oder das 25. Jahrhundert 25 Schaltjahre zu berücksichtigen.

Wegen:

$$100 + 24 = 124 \equiv 5 \quad (7)$$

und

$$100 + 25 = 125 \equiv 6 \quad (7)$$

wandert also der Wochentag nach einem vollen Jahrhundert entweder um 5 oder um 6 Tage weiter. Wenn man nun die Zahl C für das aktuelle Jahrhundert mit $C = 0$ festlegt, ergeben sich für die anderen Jahrhunderte die in der Tabelle festgehaltenen Zahlen C.

17. Jh.	0	21. Jh.	0
18. Jh.	5	22. Jh.	5
19. Jh.	3	23. Jh.	3
20. Jh.	1	24. Jh.	1

Für unser obiges Beispiel bedeutet das dann also

$$C = 0,$$

weil es das 21. Jahrhundert ist.

5 Die Ermittlung der Jahresendzahl D

Nachdem Tag, Monat und Jahrhundert berücksichtigt sind, bleiben vom Datum noch die beiden letzten Ziffern der Jahreszahl übrig. Auch hier gilt wieder, dass der Wochentag pro Jahr um einen Tag und pro Schaltjahr um 2 Tage wandert. Die nachfolgende Tabelle soll dies nun einmal für einige fortlaufende Jahre zeigen, bevor wir uns eine Rechnung überlegen.

Jahreszahl.	Wochentag	Nr.	Jahreszahl	Wochentag	Nr.
01	Sonnabend	1	13	Sonntag	2
02	Sonntag	2	14	Montag	3
03	Montag	3	15	Dienstag	4
04	Mittwoch	5	16	Donnerstag	6
05	Donnerstag	6	17	Freitag	0
06	Freitag	7	18	Sonnabend	1
07	Sonnabend	1	13	Sonntag	2
08	Montag	3	14	Dienstag	4
09	Dienstag	4	15	Mittwoch	5
10	Mittwoch	5	16	Donnerstag	6
11	Donnerstag	6	17	Freitag	0
12	Sonnabend	1	18	Sonntag	2

In dieser Tabelle sollte auffallen, dass der Wochentag in einem Zyklus von 12 Jahren immer um genau einen Tag weiter wandert. Eigentlich um zwei volle Wochen und einen Tag, doch die vollen Wochen haben auf den Wochentag keinen Einfluss. Deshalb dividieren wir zur Bestimmung von D zunächst die Jahresendzahl durch 12 und erhalten die

Zahl D_1, die die Verschiebung durch die 12-Jahreszyklen beschreibt. Der Rest D_2 gibt nunmehr die Jahre an, die wir nun noch innerhalb des angebrochenen 12-Jahreszyklus berücksichtigen müssen. Da hierbei der Tag jeweils um 1 weiterwandert, addieren wir einfach diesen Rest D_2 zu D_1. Nun ist jedoch alle vier Jahre ein Schaltjahr und es kommt ein weiterer Tag dazu. Diese werden durch die Zahl D_3 berücksichtigt, die man erhält, wenn man D_2 durch 4 dividiert. Zusammengefasst ergibt sich also folgende Rechnung:

$$37 : 12 = 3 \ R : 1 \qquad d_1 = 3 \wedge \quad D_2 = 1$$
$$1 : 4 = 0 \ R : 1 \qquad D_3 = 0$$
$$D = D_1 + D_2 + D_3$$
$$D = 3 + 1 + 0 = 4$$

Damit sind nun auch die Tage berücksichtigt, um die sich der Wochentag durch die Jahresendzahlen bedingt verschiebt und wir können nun die Gesamtverschiebung berechnen.

6 Die Bestimmung des Wochentages aus A bis D

Wir haben mit A, B, C und D die jeweiligen Verschiebungen der Wochentage bestimmt, die sich aus den verschiedenen Zeitspannen Tageszahl, Monatszahl, Jahrhundertzahl und Jahresendzahl ergeben. Die Gesamtverschiebung ergibt sich daraus, indem man die Summe dieser Verschiebungen bildet und ihren Rest bei Division durch 7 ermittelt. Wir benötigen aber noch einen Startwert, also einen passenden Ausgangspunkt. Dazu schauen wir einmal auf das Datum:

10.11.2015

Es ist:

$$A = 3$$
$$B = 4$$
$$C = 0$$
$$D = 1 + 3 + 0 = 4$$

Damit gilt:

$$W = A + B + C = D = 11$$
$$W = 11 \equiv 4 \quad (7)$$

Wir wissen, dass der 10.11.2015 ein Dienstag ist. Wenn also der Dienstag die Verschiebungsziffer 4 hat, war der Freitag der Tag mit der Ziffer 0 und wir haben unseren richtigen Startwert. Es gilt also für unsere Festlegungen:

Tag	Freitag	Sonnabend	Sonntag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag
Ziffer	0	1	2	3	4	5	6

Mit ein wenig Übung sind diese beschriebenen Rechnungen ohne Weiteres im Kopf möglich. Wie immer ist es eine Frage des Trainings. Doch haben wir wirklich schon alles berücksichtigt? Dazu betrachten wir ein weiteres Beispiel:
Beispiel:

25.02.2016

Es ist:

$$A = 25 \equiv 4 \qquad (7)$$

$$B = 4$$

$$C = 0$$

$$D = 1 + 4 + 1 = 6$$

Damit gilt:

$$W = A + B + C + D = 14$$

$$W = 14 \equiv 0 \qquad (7)$$

Der gesuchte Wochentag wäre also nach unserer Rechnung ein Freitag. Der Blick in den Kalender zeigt aber: Es ist ein Donnerstag.
Gehen wir genau eine Woche weiter, zum 03.03.2016.
Beispiel:

03.03.2016

Es ist:

$$A = 3$$

$$B = 4$$

$$C = 0$$

$$D = 1 + 4 + 1 = 6$$

Damit gilt:

$$W = A + B + C = D = 13$$

$$W = 13 \equiv 6 \qquad (7)$$

Der gesuchte Wochentag wäre also nach unserer Rechnung ein Donnerstag und es stimmt.
Der Haken ist einfach der, dass man in Schaltjahren, vor dem 1. März, durch unsere Berücksichtigung des Schaltjahres immer 1 zu viel erhält. Deshalb muss man bei diesen Daten jeweils noch die Zahl 1 subtrahieren und es stimmt wieder.
Nun ist tatsächlich alles berücksichtigt. :)