Vektorrechnung

Unterrichtsinhalte und Beispiele

Olaf Schimmel

1 Grundlegende Vektoroperationen

1.1 Der (geometrische) Begriff des Vektors

Definitionen:

Def 1.1

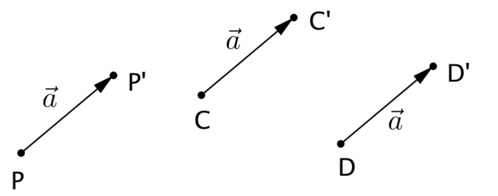
*Die Klasse aller gerichteten Strecken, die die gleiche Länge, die gleiche Richtung und die gleiche Orientierung besitzen, heißt **Vektor**.*

Schreibweisen sind: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Def 1.2

*Jede einzelne gerichtete Strecke, heißt **Repräsentant des Vektors**.*

Abb. 1



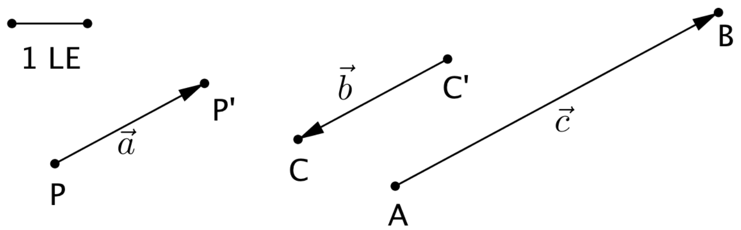
Drei Repräsentanten desselben Vektors $\vec{a}$

Def 1.3

*Der Zahlenwert der Länge eines Repräsentanten eines Vektors heißt **Betrag des Vektors**.*

Schreibweise: $|\vec{a}|$

Abb. 2



$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2.25\ LE$ $|\vec{c}| = 4.85\ LE$

Vektoren und ihre Längen $\vec{a}$

Beachten Sie: 1 LE muss nicht immer gleich 1 cm sein.

Def 1.4

Der Vektor $\vec{0}$ *mit* $|\vec{0}| = 0$ *heißt* ***Nullvektor***.

Def 1.5

Jeder Vektor $\vec{a}$ *mit* $|\vec{a}| = 1$ *heißt* ***Einheitsvektor***.

Def 1.6

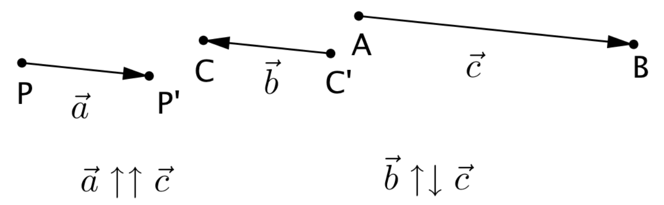
Zwei Vektoren heißen ***parallel*** *genau dann, wenn sie auf parallelen Geraden liegen.*

Schreibweise: $\vec{a}||\vec{b}$.

Def 1.7

Zwei parallele Vektoren können entweder ***gleichgerichtet*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *oder* ***entgegengesetzt gerichtet (bzw. antiparallel)*** $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *sein. (Auch richtig: gleich bzw. entgegengesetzt orientiert.)*

Abb. 3

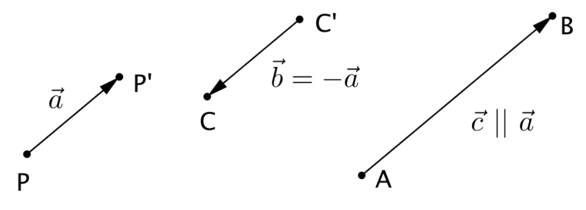


Parallele und antiparallele Vektoren.

Def 1.8

Zwei Vektoren heißen ***zueinander entgegengesetzt****, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind und gleiche Beträge haben.*

Abb. 4



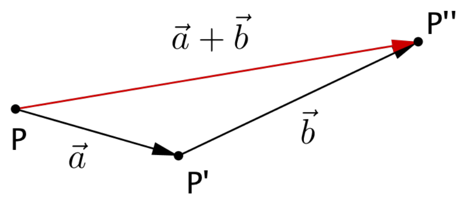
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind entgegengesetzte Vektoren. Wir schreiben: $\vec{b} = -\vec{a}$

1.2 Addition von Vektoren

Def 1.9

*Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch ihre Repräsentanten $\vec{a} = \overrightarrow{PP'}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P'P''}$. Der dadurch eindeutig bestimmte Vektor $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{PP''}$ heißt **Summe der Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$.*

Abb. 5



Die Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann man als das „Hintereinandersetzen“, bzw. als „Kette“ geeigneter Repräsentanten interpretieren.

Gesetze der Addition:
Gegeben seien beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{0}$. So gilt:

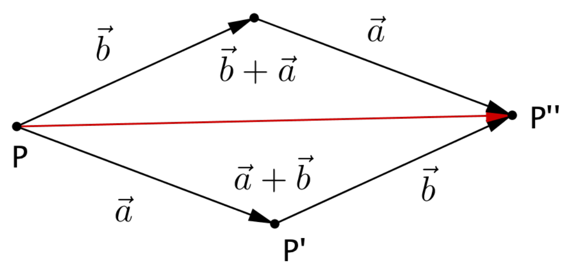
Satz 1.1

Existenz eines Nullelementes: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Satz 1.2

Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Abb. 6

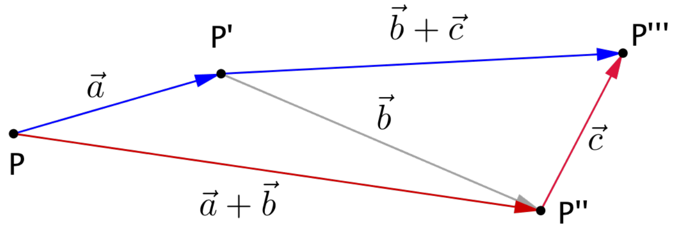


Kommutativgesetz: In welcher Reihenfolge man die Repräsentanten „hintereinandersetzt“, spielt für das Ergebnis keine Rolle.
Der Summenvektor entspricht einer Diagonale des Parallelogrammes, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Satz 1.3

Assoziativgesetz: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

Abb. 7



Assoziativgesetz: Auch bei drei Vektoren, spielt es keine Rolle, ob man zuerst die Summe der ersten beiden bildet und dazu den dritten addiert (roter Weg) oder ob man zum ersten Vektor die Summe aus dem zweiten und den dritten addiert. (blauer Weg)
Man könnte die Vektoren auch einzeln nacheinander addieren.

Satz 1.4

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\vec{b}$, so dass gilt: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

Beweis: Existenz:
Sei $\vec{a}=\overrightarrow{PP'}$, dann wählen wir $\vec{b}=\overrightarrow{P'P}$.
Für die Summe gilt somit: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{P'P}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$

Eindeutigkeit:
Annahme: Es gibt $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$ mit $\vec{a}+\vec{b}_1=\vec{0} \wedge \vec{a}+\vec{b}_2=\vec{0}$
Folgerung:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_2 &= \vec{b}_2+\vec{0}\\
&= \vec{b}_2+(\vec{a}+\vec{b}_1)\\
&= (\vec{b}_2+\vec{a})+\vec{b}_1\\
&= \vec{0}+\vec{b}_1\\
&= \vec{b}_1
\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir nennen den Vektor $\vec{b}$ auch den zu $\vec{a}$ **inversen Vektor** und schreiben $\vec{b}=-\vec{a}$

Satz 1.5

Die Vektorgleichung $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ hat die eindeutige Lösung $\vec{x}=-\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$.

1.3 Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

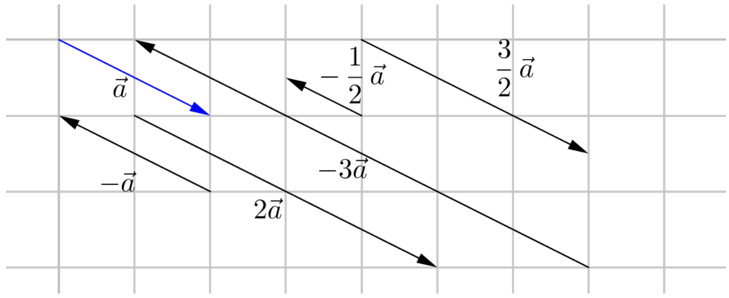
Def 1.10

Das Produkt $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ aus einer reellen Zahl λ und einem Vektor $\vec{a}$ wird folgendermaßen festgelegt:

(1) $|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

(2) $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a} \quad \wedge \quad \lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$

Abb. 8



Beispiele für die Multiplikation Zahl mit Vektor (S-Multiplikation)

Eigenschaften der S-Multiplikation:
Gegeben seien reelle Zahlen λ und μ, ein Vektor $\vec{a}$ und der Nullvektor $\vec{o}$. Dann gilt:

Satz 1.6 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Satz 1.7 $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Satz 1.8 $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Satz 1.9 $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

Satz 1.10 $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$

Satz 1.11 $\lambda \cdot (-\vec{a}) = -\lambda \cdot \vec{a}$

Beweis 1.10: linke Seite:
$|\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})| = |\lambda| \cdot |\mu \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}|$
$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$, wenn $sgn(\lambda) = sgn(\mu)$
$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$, wenn $sgn(\lambda) \neq sgn(\mu)$

rechte Seite:
$|(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}| = |\lambda \cdot \mu| \cdot |\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}|$
$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, wenn $sgn(\lambda) = sgn(\mu)$
$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, wenn $sgn(\lambda) \neq sgn(\mu)$

Wenn $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$, dann entsteht aus 1.10: $\vec{0} = \vec{0}$.
In allen Fällen sind die rechte und die linke Seite gleich.

2 Linearkombination von Vektoren

2.1 Begriff der Linearkombination

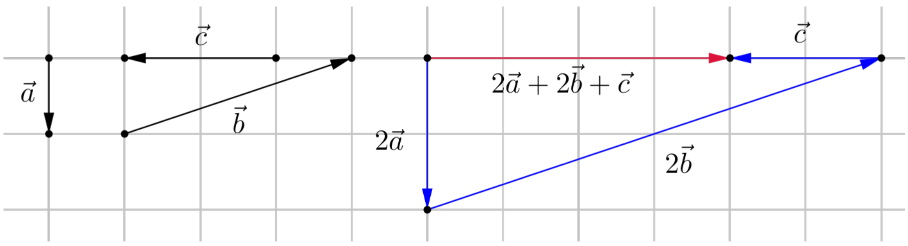
Def 2.1

Seien $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3; ...; \vec{a}_n\}$ eine Menge von Vektoren und $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; ...; \lambda_n$ beliebige reelle Zahlen, dann heißt jede Darstellung der Form

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$$

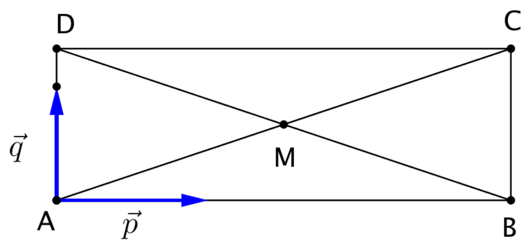
Linearkombination *der Vektoren $\vec{a}_1$ bis $\vec{a}_n$.*

Abb. 9



Beispiel für eine Linearkombination aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Beispiel: Drücken Sie die Vektoren für die Seiten und die Diagonalen des Rechtecks ABCD mit Hilfe der gegebenen Vektoren $\vec{p} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ und $\vec{q} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ aus.



$$\vec{p} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{q} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{AD}$$

Lösungen:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = 3\vec{p}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\vec{q}$

$\overrightarrow{AC} = 3\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$ $\overrightarrow{BD} = -3\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} = -\frac{3}{2}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$ $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$

Durch Linearkombinationen kann man Untersuchungen an geometrischen Figuren führen. Dabei reichen wenige Ausgangsvektoren aus, um alle anderen Vektoren darzustellen. In der Ebene benötigt man zwei und im Raum drei geeignete Ausgangsvektoren.
Zu Vereinfachungen der rechnerischen Ansätze benötigen wir noch zwei Gesetzmäßigkeiten.

Distributivgesetze:

Satz 2.1

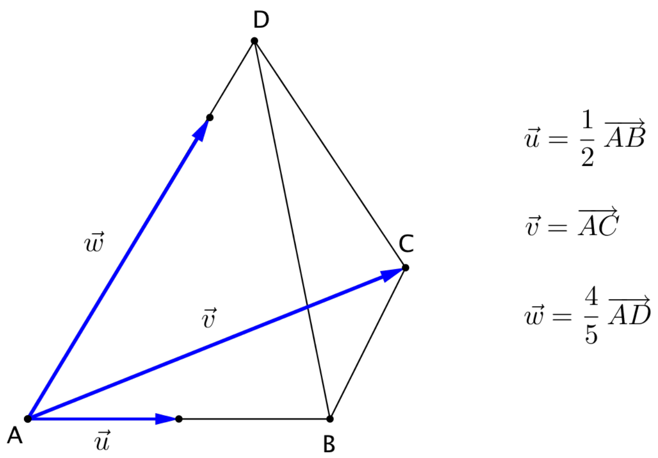
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}$ $\vec{b}$ Vektoren. Dann gilt:

(1) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$

(2) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Es folgt noch ein Beispiel aus dem dreidimensionalen Raum.

Beispiel: Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide ABCD.
Es gilt: $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ und $\vec{w} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$.
Stellen Sie alle Kantenvektoren durch $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dar.



Lösungen:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$,
$\overrightarrow{BC} = -2\vec{u} + \vec{v}$
$\overrightarrow{CD} = -\vec{v} + \frac{5}{4}\vec{w}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{4}\vec{w}$
$\overrightarrow{BD} = -2\vec{u} + \frac{5}{4}\vec{w}$

2.2 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definitionen

Def 2.2

*Die Vektoren $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3; ...; \vec{a}_n$ heißen **linear abhängig** genau dann, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; ...; \lambda_n$ nicht alle gleich Null so gibt, dass gilt:*

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \vec{a}_i.$$

Def 2.3

*Wenn sich der Nullvektor nur auf die triviale Weise erzeugen lässt, dass gilt: $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, heißen die Vektoren **linear unabhängig**.*

Satz 2.2

Die Vektoren $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3; ...; \vec{a}_n$ sind linear abhängig genau dann, wenn es mindestens einen unter ihnen gibt, der sich als Linearkombination der anderen darstellen lässt.

Beweis:

Richtung $\Rightarrow$:
Der Vektor $\vec{a}_k$ lässt sich durch die anderen darstellen:
$\vec{a}_k = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n \quad | - \vec{a}_k \qquad$ ohne $\vec{a}_k$
$\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... - a_k + ... + \lambda_n\vec{a}_n$
Wegen $\lambda_k \neq 0$ wird der Nullvektor nichttrivial erzeugt, d.h. die Vektoren sind linear abhängig.

Richtung $\Leftarrow$:
Die Vektoren sind linear anhängig.
Nach Def 2.2 gibt es dann in $\vec{0} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$ ein $\lambda_k \neq 0$.
Wir rechnen: $-\lambda_k\vec{a}_k$:
$-\lambda_k\vec{a}_k = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + ... + \lambda_n\vec{a}_n \qquad | : (-\lambda_k)$

$$\vec{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_k}\vec{a}_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\vec{a}_n$$

Der Vektor $\vec{a}_k$ lässt sich also aus den anderen linear kombinieren.

Schlussfolgerung:
Lässt sich kein Vektor $\vec{a}_i$ aus den anderen Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\}$ durch Linearkombination erzeugen, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Spezialfälle für zwei und drei Vektoren:

Satz 2.3

Seien $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *zwei Vektoren mit* $|\vec{a}| \neq 0$ *und* $|\vec{b}| \neq 0$. *Dann gilt:*

1. *Wenn* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *abhängig sind, dann gilt:* $\vec{a}||\vec{b}$ *und umgekehrt.*
2. *Wenn* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *unabhängig sind, also eine Ebene aufspannen, dann kann man jeden Vektor* $\vec{x}$ *dieser Ebene in eindeutiger Weise als Linearkombination aus* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *darstellen.*

Beweis: Teil 1:

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ abhängig. Dann gib es eine Zahl λ mit $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$
Daraus folgt aber sofort $\vec{b}||\vec{a}$
Umkehrung analog.

Teil 2:

Wir betrachten den Vektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$
Wir zeichnen eine zu $\vec{a}$ parallele Trägergerade a durch O und eine zu $\vec{b}$ parallele Trägergerade b durch X. Da a und b nicht parallel sein können, sei $a \cap b = P$. Dann gilt:
$\overrightarrow{OP} = \lambda_1 \cdot \vec{a}$ und $\overrightarrow{PX} = \lambda_2 \cdot \vec{b}$.
Mit $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b}$ gibt es also eine Linearkombination.
Eindeutigkeit:
Annahme: Es gibt zwei verschiedene Linearkombinationen für $\vec{x}$.
Also: $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ mit $\lambda_1 \neq r$ und $\lambda_2 \neq s$
Daraus folgt: $(\lambda_1 - r) \cdot \vec{a} + (\lambda_2 - s) \cdot \vec{b} = \vec{0}$
Da aber $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = r$ und $\lambda_2 = s$, also ein Widerspruch.
Die Darstellung ist also eindeutig.

Satz 2.4

Wenn drei Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie den dreidimensionalen Raum auf und umgekehrt.

Begründung: Aus Satz 2.3 wissen wir, dass sich jeder Vektor der Ebene aus zwei linear unabhängigen Vektoren kombinieren lässt.
Damit sind drei komplanare Vektoren (d.h. Vektoren in einer Ebene) stets linear abhängig und umgekehrt.
Wenn sie also unabhängig sind, dann spannen sie den Raum auf und umgekehrt.

2.3 Geometrische Beweise mit Linearkombinationen

Jeder elementargeometrische Satz lässt sich vektoriell beweisen. Eine Gruppe dieser Beweise führt über Linearkombinationen. Einige Beispiele sollen dies zeigen.

Beispiel 1: Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, dann ist es ein Parallelogramm.

Voraussetzung (vektoriell):
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Behauptung (vektoriell): $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} || \overrightarrow{BC}$

Nachweis:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} = &\quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} \\ = &\quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} \\ = &\quad \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} \\ = &\quad \overrightarrow{BC} \\ \Rightarrow &\quad \overrightarrow{AD} || \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\overrightarrow{AB} || \overrightarrow{DC}$

Beispiel 2: Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann halbieren sich die Diagonalen.

Voraussetzung (vektoriell): $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = vecb$

Behauptung (vektoriell):
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Nachweis:
Sei $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$ und $\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BD} = \mu(-\vec{a} + \vec{b})$

Dann ist: $\overrightarrow{MC} = (1 - \lambda)(\vec{a} + \vec{b})$ und $\overrightarrow{BM} = (1 - \mu)(-\vec{a} + \vec{b})$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{DC} &= \vec{a} \\
\vec{a} &= \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} \\
\vec{a} &= -(1-\mu)(-\vec{a}+\vec{b}) + (1-\lambda)(\vec{a}+\vec{b}) \\
\vec{0} &= (1-\lambda-\mu)\vec{a} + (\mu-\lambda)\vec{b} \\
\Rightarrow & \quad 0 = 1-\lambda-\mu \quad \wedge \quad 0 = \mu-\lambda \\
\Rightarrow & \quad \lambda = \mu = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3 Vektorraum (Extra)

Wir wollen nun jede Menge von Oblekten, die die bisher behandelten Eigenschaften besitzt zu einem neuen Begriff **Vektorraum** zusammenfassen. Damit erhalten wir die folgende Definition.

Def 3.1

Sei V eine beliebige Menge für die eine Addition und die Multiplikation mit reellen Zahlen (S-Multiplikation) definiert ist. V heißt zusammen mit diesen Operationen Vektorraum $(V, +, \cdot)$*, genau dann, wenn für beliebige* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$*,* $\vec{c}$ *aus V und beliebige reelle Zahlen* λ*;* μ *gilt:*

1. *Es gilt stets:* $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
2. *Es gibt ein Element* $\vec{0}$ *mit* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
3. *Zu jedem Element* $\vec{a}$ *gibt es genau ein Element* $-\vec{a}$*, so dass gilt:* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
4. *Es gilt stets:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
5. *Für die Zahl 1 gilt:* $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6. *Es gilt stets:* $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$
7. *Es gilt stets:* $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
8. *Es gilt stets:* $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Bemerkungen:

1. Der Begriff ist viel allgemeiner als nur geometrisch zu interpretieren, denn V kann eine beliebige Menge sein.
2. In der Definition kommen zwei verschiedene Multiplikationen vor, die man streng genommen getrennt betrachten müsste. Die Multiplikation zwischen reellen Zahlen und die einer Zahl mit einem Vektor (S-Multiplikation).
3. Um zu zeigen, dass eine Menge ein Vektorraum ist, muss man alle diese Eigenschaften einzeln nachweisen.

4 Vektoren in Komponenten- und Koordinatenform

4.1 Basen und Koordinatensysteme

Def 4.1

*Seien $\vec{a}_1; \vec{a}_2; ...; \vec{a}_n$ linear unabhängige Vektoren. Dann heißt $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; ...; \vec{a}_n\}$ **Basis** des von den Vektoren aufgespannten Vektorraumes.*

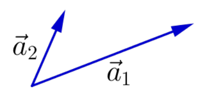
Def 4.2

Eine Basis heißt orthonormiert, wenn für die Basisvektoren folgendes gilt:

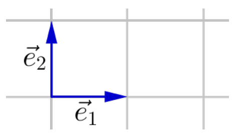
1. *Die Basisvektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander: $i \neq j \Rightarrow \vec{a}_i \perp \vec{a}_j$*
2. *Alle Basisvektoren sind Einheitsvektoren: $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = ... = |\vec{a}_n| = 1$*

Spezialfälle:

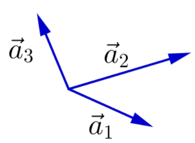
Zwei nichtkollineare (nichtparallele) Vektoren bilden eine Basis der Ebene (des $\mathbb{R}^2$).



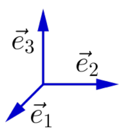
Zwei orthogonale Einheitsvektoren bilden eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^2$.



Drei nicht komplanare Vektoren bilden eine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.



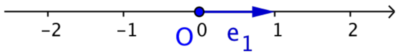
Drei nicht komplanare, paarweise orthogonale Einheitsvektoren bilden eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$.



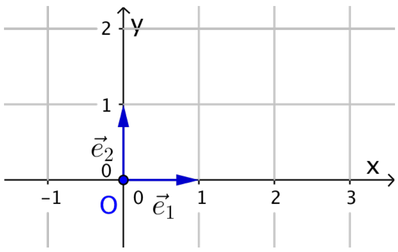
Def 4.3

Sei $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; ...; \vec{e}_n\}$ eine orthonormierte Basis und O der Koordinatenursprung. Dann heißt $\{O, \vec{e}_1; \vec{e}_2; ...; \vec{e}_n\}$ ***kartesisches Koordinatensystem*** *des n-dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$.*

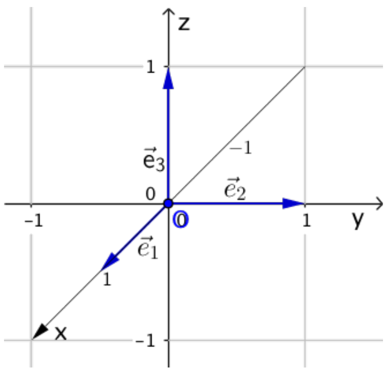
kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^1$



kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$



kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$



Def 4.4

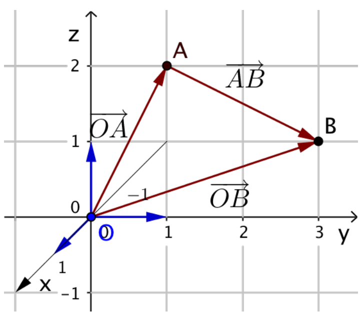
Jeder Repräsentant eines Vektors, der vom Koordinatenursprung O zu einem Punkt P in einem Koordinatensystem führt, heißt ***Ortsvektor*** *$\overrightarrow{OP}$.*

Satz 4.1

Jeder Vektor zwischen zwei Punkten A und B in einem beliebigen Koordinatensystem lässt sich als Differenz zweier Ortsvektoren darstellen. Es gilt dann: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Beweis:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



4.2 Komponenten und Koordinaten von Vektoren

Def 4.5

Sei $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ ein Koordinatensystem des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$, für die jeder Vektor $\vec{x}$ eindeutig durch Linearkombination in der Form

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

darstellbar ist. Dabei heißen:

$x_1\vec{e}_1, x_2\vec{e}_2, ..., x_n\vec{e}_n$ ***Komponenten*** *von* $\vec{x}$ *und*

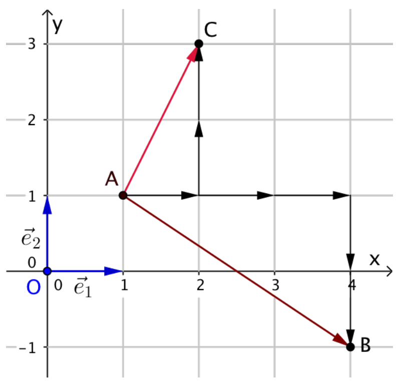
$x_1, x_2, ..., x_n$ ***Koordinaten*** *von* $\vec{x}$.

Beispiel:

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Bemerkungen:

1. Obige Definition gilt für beliebigdimensionale Vektorräume. Die Anzahl der Koordinaten der Vektoren entspricht der Dimension.

2. Man beachte die unterschiedlichen Schreibweisen für Punkte und Vektoren. Ein Punkt im $\mathbb{R}^n$ wird stets in der Form eines geordneten Tupels geschrieben. Jeder Vektor dagegen in Spaltenschreibweise.

$$P(x_1; x_2; ...; x_n) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. Ein Ortsvektor hat dieselben Koordinaten wie sein Endpunkt.

4. Die Basisvektoren in Koordinatenform lauten:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; ...\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei steht immer an der i-ten Stelle des Vektors $\vec{e}_i$ die Zahl 1, während alle anderen Koordinaten den Zahlenwert 0 haben.

4.3 Rechnen mit Vektoren

Satz 4.2

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *und* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *So gilt:*

1. *Addition in Koordinatenform:* $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

2. *S-Multiplikation in Koordinatenform:* $\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$

3. *Distributivgesetz (1):* $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \vdots \\ \lambda b_n \end{pmatrix}$

4. *Distributivgesetz (2):* $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix}$

Bemerkungen:

1. Die Beweise erfolgen über Nachrechnen unter Anwendung der Definitionen und der Rechenregeln zu den Rechenoperationen. Sämtliche dort angegebenen Gesetze lassen sich in die Koordinatenform der Vektoren übertragen und somit auf das Rechnen mit reellen Zahlen zurückführen.

2. Wie wir in den Beispielen noch sehen werden, entstehen beim Rechnen mit Parametern oft lineare Gleichungssysteme.

Beispiel: Gegeben sind im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie $3 \cdot \vec{a} + 4 \cdot (2\vec{b} - \vec{a})$

2. Untersuchen Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Parallelität.

Lösung:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \vec{a} + 4 \cdot (2\vec{b} - \vec{a}) &= 3 \cdot \vec{a} + 8 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{a} \\ &= -\vec{a} + 8 \cdot \vec{b} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -11 \\ 18 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ansatz: Es müsste eine Zahl t geben mit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec{b} &= t \cdot \vec{a} \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad -1 &= t \cdot 3 \quad \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow \quad 2 &= t \cdot -2 \quad \Rightarrow t = -1 \\ \Rightarrow \quad 0 &= t \cdot -4 \quad \Rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

Widerspruch, da kein einheitlicher Wert für t. Also gilt: $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

4.4 Untersuchung auf lineare Unabhängigkeit

Um eine Gruppe von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu untersuchen, kann man die Definition benutzen und versuchen, den Nullvektor durch Linearkombination zu erzeugen. Ist er nur auf triviale Weise erzeugbar, sind die Vektoren linear unabhängig. Gibt es eine nichttriviale Möglichkeit, so sind sie linear abhängig.
Eine bessere Methode ist es jedoch häufig, den Satz 2.2 anzuwenden und einen der Vektoren mit Hilfe der anderen darzustellen. Gibt es eine solche Darstellung, sind die Vektoren linear abhängig. Gibt es sie nicht, dann sind sie unabhängig.

Unabhängigkeit bei zwei Vektoren
Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:

1. Zwei Vektoren sind linear unabhängig.
2. Die beiden Vektoren sind nichtkollinear (d.h. nicht parallel).
3. Es gibt keine reelle Zahl (ungleich Null) mit der man einen der beiden Vektoren multiplizieren könnte, so dass der andere entsteht.

Beispiel: Untersuchen Sie, für welche Parameterwerte t die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} t+4 \\ 2t \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Lösung: Wir stellen $\vec{b}$ als Vielfaches von $\vec{a}$ dar:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \lambda\vec{a} \\ \begin{pmatrix} t+4 \\ 2t \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t+4 &= \lambda \quad \wedge \quad 2t = -2\lambda \\ \Rightarrow \quad 2t &= -2(t+4) \\ 4t &= -8 \\ t &= -2 \\ \lambda &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nur für $t = -2$ sind die Vektoren linear abhängig. Für alle anderen Werte von t sind sie unabhängig.

Unabhängigkeit bei drei Vektoren

Folgende Aussagen sind zueinander äquivalent:

1. Drei Vektoren sind linear unabhängig.
2. Die drei Vektoren sind nicht komplanar (d.h. liegen nicht in einer Ebene)
3. Es gibt keinen der drei Vektoren, der sich als Linearkombination aus den anderen beiden darstellen lässt.

Beispiel: Untersuchen Sie die Vektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 39 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit.

Lösung: Wir stellen $\vec{c}$ als Vielfaches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 39 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -1 &= \lambda + 4\mu \\ -8 &= -2\lambda - 3\mu \\ 39 &= 5\lambda - 2\mu \end{aligned}$$

$$(1) \wedge (2) \Rightarrow \quad \lambda = 7 \quad \wedge \quad \mu = -2$$

$$\begin{aligned} in\ (3) \Rightarrow \quad 39 &= 5 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) \\ 39 &= 39 \quad w.A. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 39 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind linear abhängig, denn es gibt eine Linearkombination, mit der sich $\vec{c}$ aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt.
Man hätte übrigens jeden der drei Vektoren durch die anderen beiden darstellen können.

4.5 Unabhängigkeit mit Determinanten (Extra)

Hat man genau n Vektoren des $\mathbb{R}^n$, so kann man eine Determinante nutzen, um die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit zu untersuchen. Besonders bei zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ eignet sich dieses Verfahren.

Vorgehensweise:

1. Trage die Spaltenvektoren nebeneinander in die Determinante ein.
2. Berechne den Wert der Determinante.
3. Entscheide über die Unabhängigkeit.

Entscheidungsregel:
Ist die Determinante **un**gleich Null, so sind die Vektoren **un**abhängig.

Berechnung von Determinanten:
Eine Determinante ist eine Zahl, die aus einem quadratischen Zahlenschema nach einer wohldefinierten Rechenvorschrift entsteht. (Hier nur für zweireihige und dreireihige Determinanten beschrieben.)

1. Eine zweireihige Determinante wird berechnet, indem man das Produkt aus den Elementen Nebendiagonalen vom Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen subtrahiert.
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$
2. Eine dreireihige Determinante wird berechnet, indem man die Produkte aller ergänzten Nebendiagonalen von den Produkten der ergänzten Hauptdiagonalen subtrahiert. (Regel von Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Beispiel: Berechnung einer dreireihigen Determinante

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ -3 & 6 & 2 \end{vmatrix} &= 8 - 105 - 36 - 12 - 84 - 30 \\ &= -259 \end{aligned}$$

Beispiel: Untersuchen Sie die Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t+3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t+2 \\ t-2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von t.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-1 & t+2 \\ t+3 & t-2 \end{vmatrix} &= (t+1)(t-2) - ((t+3)(t+2)) \\
&= t^2 - t - 2 - (t^2 + 5t + 6) \\
&= -6t - 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-6t - 8 &= 0 \\
t &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ergebnis:
Nur für $t = -\frac{4}{3}$ sind die Vektoren linear abhängig. Für alle anderen Werte sind sie linear unabhängig.

Beispiel: Untersuchen Sie die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 39 \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & -8 \\ 5 & -2 & 39 \end{vmatrix} &= -117 - 160 - 4 - (15 + 16 - 312) \\
&= -281 + 281 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ergebnis: Die Vektoren sind linear abhängig.

Beispiel: Für welche Parameterwerte sind die folgenden Vektoren komplanar?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & a+1 & -2 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= a + a + 1 + 0 - (-2 + 0 + 2a^2 + 2a) \\ &= -2a^2 + 3 \\ -2a^2 + 3 &= 0 \\ a^2 &= \frac{3}{2} \\ a_1 &= \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ a_2 &= -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

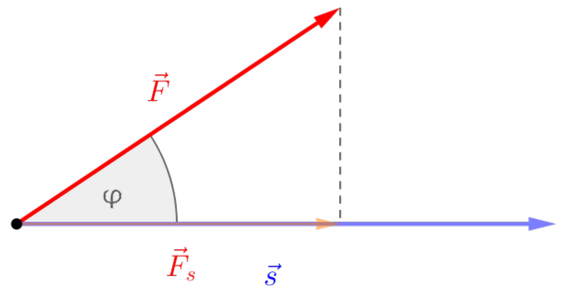
Ergebnis:
Nur für die beiden berechneten Werte von a sind die Vektoren komplanar.

5 Skalarprodukt von Vektoren

5.1 Definition und geometrische Deutung

Beispiel: Ein Handwagen wird mit einer konstanten Zugkraft $\vec{F}$ entlang eines Weges $\vec{s}$ gezogen. Zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ bestehe der Winkel φ. Zu berechnen ist die verrichtete mechanische Arbeit.

Die gesuchte Arbeit ist das Produkt der Kraftkomponente, die in Wegrichtung wirkt und dem Weg. (Skizze)



Mit der Festlegung: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

ergibt sich: $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \vec{F}_s \cdot \vec{s} = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}| = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi \cdot |\vec{s}|$

und damit erhält man: $\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$

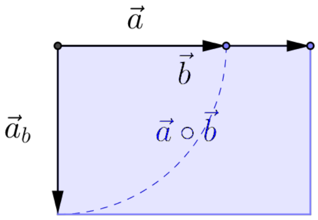
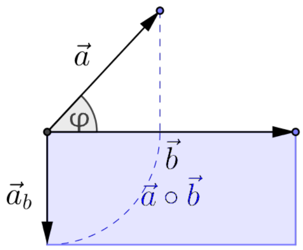
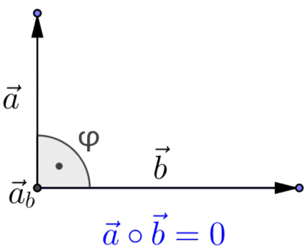
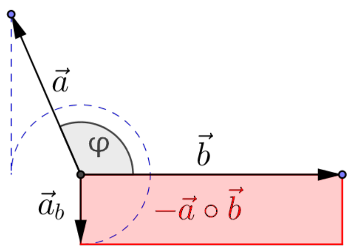
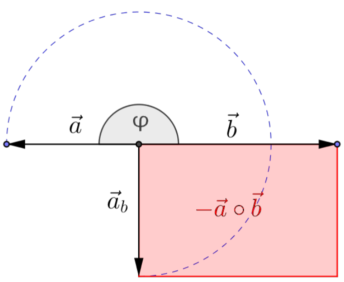
Offensichtlich hat ein so definiertes Produkt zwischen zwei Vektoren in der Physik eine wichtige Bedeutung. Wir legen also fest:

Def 5.1

*Als **Skalarprodukt** zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man das Produkt aus den Beträgen der beiden Vektoren und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.*

$$\vec{a} \circ \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

geometrische Deutung des Skalarproduktes:

Winkel	Skalarprodukt	Skizze	Bemerkung
$\varphi = 0°$	$\vec{a} \circ \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$		$\cos\varphi = 1$ $\vec{a} \circ \vec{b}$ hat maximalen Wert.
$0° < \varphi < 90°$	$\vec{a} \circ \vec{b} < \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$		$0 < \cos\varphi < 1$ $\vec{a} \circ \vec{b} > 0$
$\varphi = 90°$	$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$		$\cos\varphi = 0$ wichtiger Sonderfall!
$90° < \varphi < 180°$	$-\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert < \vec{a} \circ \vec{b}$		$-1 < \cos\varphi < 0$ $\vec{a} \circ \vec{b} < 0$
$\varphi = 180°$	$\vec{a} \circ \vec{b} = -\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert$		$\cos\varphi = -1$ $\vec{a} \circ \vec{b}$ hat minimalen Wert.

Satz 5.1

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die nicht Nullvektor sind, wird genau dann gleich Null, wenn die Vektoren senkrecht zueinander stehen.

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \end{aligned}$$

Satz 5.2

Der Betrag eines Vektors ist die Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{a} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{a}) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \\ &= |\vec{a}|^2 \\ \Rightarrow \quad |\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Offensichtlich ist das Skalarprodukt zweier Vektoren eine **Zahl**, deren Betrag man als Fläche des von dem einem Vektor und der senkrechten Projektion des zweiten Vektors auf den ersten begrenzten Rechtecks deuten kann.

2. Aus den bisherigen Überlegungen entnehmen wir weiterhin, dass man mit Hilfe des Skalarproduktes Beträge von Vektoren und Winkel berechnen kann. Außerdem kann man es nutzen, um Vektoren auf Orthogonalität zu prüfen.

3. Offen ist noch, wie man das Skalarprodukt zweier Vektoren aus deren Koordinatenform berechnen kann.

5.2 Das Skalarprodukt in Koordinatenform

.

Satz 5.3

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. *Dann berechnen wir das Skalarprodukt in der folgenden Weise:*

$$\vec{a} \circ \vec{b} := a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + ... + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Beweis für den $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3 \cdot \vec{e}_3) \circ (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3) \\
&= a_1\vec{e}_1 \circ (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3) + a_2\vec{e}_2 \circ (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3) \\
&\quad + a_3\vec{e}_3 \circ (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3 \cdot \vec{e}_3) \\
&= a_1\vec{e}_1 \circ b_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \circ b_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \circ b_3\vec{e}_3 \\
&= a_1b_1\vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 \\
&= a_1b_1|\vec{e}_1|^2 + a_2b_2|\vec{e}_2|^2 + a_3b_3|\vec{e}_3|^2 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Wegen $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$ für $i \neq j$ gilt für diese $\vec{e}_i \circ \vec{e}_j = 0$. Daher bleiben nur die Produkte mit denselben Einheitsvektoren erhalten.
2. Der Beweis funktioniert für beliebige Dimensionen analog, wenn $\vec{e}_i$ die Vektoren einer orthonormierten Basis sind.

Beispiele: Berechnung einiger Skalarprodukte

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-7) = -15$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2)(-4) + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 13$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-10) + 0 + 0 + 4 \cdot 5 = 0$$

5.3 Eigenschaften und Rechenregeln

Satz 5.4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ eines beliebigen Vektorraumes. Dann gilt:

1. *Einfluss des Nullvektors:* $\vec{0} \circ \vec{a} = 0$
2. *Kommutativgesetz:* $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
3. *Distributivgesetz:* $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$

Beweis:
1. Teil:

$$\vec{0} \circ \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot a_i = 0$$

2. Teil:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot a_i = \vec{b} \circ \vec{a}$$

3. Teil:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot c_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i c_i + b_i c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$$

Eine Multiplikation der Form $(\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$ macht keinen Sinn, da das Produkt aus zwei Vektoren eine Zahl ist und diese nicht als Faktor für ein Skalarprodukt in Frage kommt.

5.4 Anwendungen des Skalarproduktes

5.4.1 Berechnung des Betrages von Vektoren

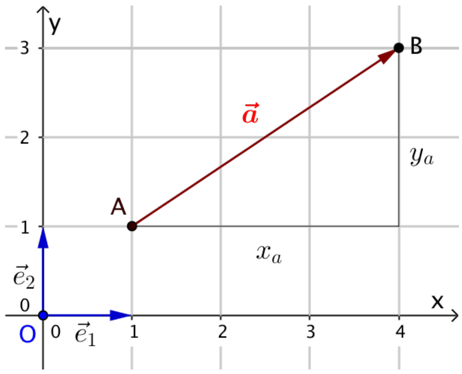
Mit Satz 5.2 können wir nun den Betrag bzw. die Norm des Vektors berechnen.

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \circ \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Spezialfälle:
Wir bezeichnen die Koordinaten im Folgenden im $\mathbb{R}^2$ mit x und y und im $\mathbb{R}^3$ mit x, y und z und so folgt:

Im $\mathbb{R}^2$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$

und im $\mathbb{R}^3$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$



Beispiele: Berechnung einiger Vektorbeträge

$$\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\left|\begin{pmatrix} a-1 \\ \sqrt{2a} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2 - 2a + 1 + 2a} = a^2 + 1$$

$$\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 11^2} = \sqrt{161}$$

Für welche Zahl x entsteht ein Vektor mit dem Betrag 13 LE?

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ x+8 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 13$$

$2x^2 + 16x + 73 = 169$
$x^2 + 8x - 48 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -12; x_2 = 4$

5.4.2 Untersuchung auf Orthogonalität

Das Skalarprodukt kann genutzt werden, um Vektoren paarweise auf Orthogonalität zu untersuchen, beziehungsweise diese Eigenschaft nachzuweisen. Dies ist besonders bei geometrischen Anwendungen wichtig. Wir nutzen dabei die Eigenschafft, dass das Skalarprodukt den Wert Null annimmt, wenn die Vektoren zueinander orthogonal sind.

Beispiel 1: Sind die angegebenen Vektoren paarweise orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \ ?$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 - 18 + 24 = 0 \ \Rightarrow \ \text{Vektoren senkrecht.}$$

Beispiel 2: Für welche Werte von a sind die Vektoren zueinander orthogonal?

$$\begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \ ?$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a-3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = -2a + a - 3 + 12 = 0 \quad \Rightarrow \ a = 9$$

Für a = 9 sind die Vektoren orthogonal.

Beispiel 3: Ist das Dreieck ABC mit $A(2;3); B(5;7); C(1;10)$ rechtwinklig?

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = -3 + 28 = 25 \neq 0$$
$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = -12 + 12 = 0$$

Das Dreieck ABC ist rechtwinklig beim Punkt B.

Beispiel 4: Bestimmen Sie einen Vektor, der zu den beiden gegebenen Vektoren orthogonal ist.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3x - y + 5z = 0 \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2x + y + 2z = 0$$

Wir eliminieren y: $-5x + 7z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{5}z$

Wir setzen ein: $-2 \cdot \frac{7}{5}z + y + 2z = 0 \;\Rightarrow y = \frac{4}{5}z$

$$z = 5 \;\Rightarrow\; y = 4 \wedge x = 7 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel 5 Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD mit A(0; 1; 2); B(-4; 5; 5); C(2; 8; 9) und D(6; 4; 6) ein Rechteck ist.

Vektoren: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Vektoren gegenüberliegender Seiten sind gleich, die Seiten selbst also gleichlang und parallel. Damit ist das Viereck ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = -24 + 12 + 12 = 0$

Der Winkel bei A ist ein rechter Winkel. Wegen der Parallelität der gegenüberliegenden Seiten sind alle Innenwinkel recht Winkel. Damit ist das Viereck ein Rechteck.

5.4.3 Berechnung von Winkeln

Wir leiten zunächst die Formel zur Berechnung eines Winkels aus zwei gegebenen Vektoren her. Wir gehen von der Definiton des Skalarproduktes aus und stellen diese nach dem Kosinus des Winkels um.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad | : \vec{a} \mid : \vec{b}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}}$$

Damit können wir über den Kosinus beliebige Winkel berechnen.

Beispiel 1: Berechnen Sie den Winkel zwischen: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{12 + 14 + 10}{\sqrt{38}\sqrt{69}} = \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 48,3°$$

Beispiel 2: Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel im Dreieck ABC mit A(1; 2; 4); B(3; -2; 2) und C(4; 6; 5).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Seitenlängen:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = 2\sqrt{6}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 64 + 9} = \sqrt{74}$

Winkel:

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{6 - 16 - 2}{2\sqrt{6}\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 118,7°$$

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{-2 + 32 + 6}{2\sqrt{6}\sqrt{74}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{74}} \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 31,3°$$

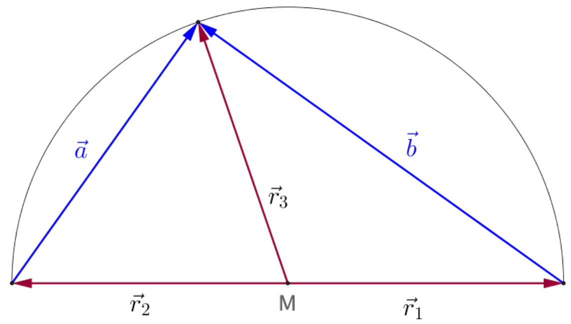
$$\sphericalangle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180° - 118,7° - 31,3° = 30°$$

5.4.4 Weitere Anwendungen

Das Skalarprodukt eignet sich auch zur Beweisführung. Hier wird besonders die Eigenschaft genutzt, dass es verschwindet, wenn Orthogonalität besteht. Die Sätze sollte man vorher in vektorieller Form aufschreiben.

Beispiel 1: Satz des Thales

Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.



Voraussetzung: $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = |\vec{r}_3| = r$

Behauptung: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \circ \vec{b} &= (-\vec{r}_2 + \vec{r}_3) \circ (-\vec{r}_1 + \vec{r}_3) \\
&= \vec{r}_1 \circ \vec{r}_2 - \vec{r}_2 \circ \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \circ \vec{r}_3 + \vec{r}_3^2 \\
&= -\vec{r}_1^2 - (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \circ \vec{r}_3 + \vec{r}_3^2 \\
&= -r^2 - \vec{0} \circ \vec{r}_3 + r^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Satz des Pythagoras (bezogen auf obige Figur)

Voraussetzung: $\vec{a} \perp \vec{b}$

Behauptung: $c^2 = a^2 + b^2$

Beweis:

$$\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c}^2 \\
&= (\vec{a} - \vec{b})^2 \\
&= \vec{a}^2 - 2\vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b}^2 \\
&= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

6 Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von Vektoren

6.1 Definition des Vektorproduktes

Def 6.1

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des $\mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor mit den folgenden Eigenschaften Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$:

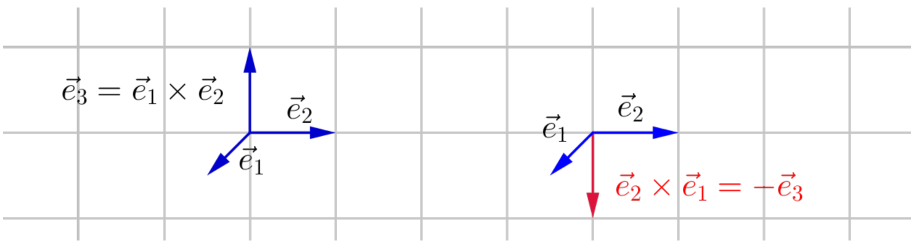
1. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
2. $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a} \ \wedge \ (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
3. *$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.*

Bemerkungen:

1. Das Vektorprodukt ist ein Vektor und keine reelle Zahl.
2. Dieses Produkt gibt es nur im dreidimensionalen Raum.
3. Für die Einheitsvektoren einer orthonormierten Basis gilt:

   $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3; \ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \ \wedge \ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

   Da die Winkel 90° sind, ist der Sinus 1 und wir erhalten wieder Einheitsvektoren.

   Das Produkt $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$ ergibt dagegen $-\vec{e}_3$, da sonst die letzte Bediungung der Definition nicht erfüllt ist.

4. Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt: $|\vec{a} \times \vec{a}| = |\vec{a}|^2 \sin 0° = 0$. Damit ergibt sich: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

6.2 Eigenschaften des Kreuzproduktes

Satz 6.1

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. *Das Vektorprodukt ist* ***antikommutativ****:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. *Das Vektorprodukt erfüllt mit der Addition ein* ***Distributivgesetz****:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

3. *Das Vektorprodukt ist* ***bilinear****:*

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

4. *Wenn das Vektorprodukt den Nullvektor ergibt, ist einer der Faktoren der Nullvektor oder beide Vektoren sind kollinear.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \ \vee \ \vec{b} = \vec{0} \ \vee \ \vec{a} || \vec{b}$$

Bemerkungen:

1. Die Eigenschaften 1., 3. und 4. ergeben sich direkt aus der Definition, lediglich das Distributivgesetz ist etwas schwieriger nachzuweisen..
2. Das Kommutativgesetz gilt nicht, weil die Bedingung 3. aus der Definition nicht erfüllt wäre.
3. Die Bilinearität lässt sich leicht aus der Formel der Definition herleiten, wenn man dazu ausnutzt, dass gilt $\vec{a} \ || \ \lambda\vec{a}$.

Satz 6.2

Für die Einheitsvektoren der orthonormierten Basis gilt:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_1 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

6.3 Koordinatenform des Vektorproduktes

Satz 6.3

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. *Dann gilt:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Wir benutzen die Rechengesetze und den Satz über die Produkte der Einheitsvektoren.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
&= a_1b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1b_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \\
&\quad + a_2b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2b_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2b_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \\
&\quad + a_3b_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3b_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) \\
&= \vec{0} + a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 + \vec{0} + a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 + \vec{0} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beispiele: Berechnung einiger Vektorprodukte

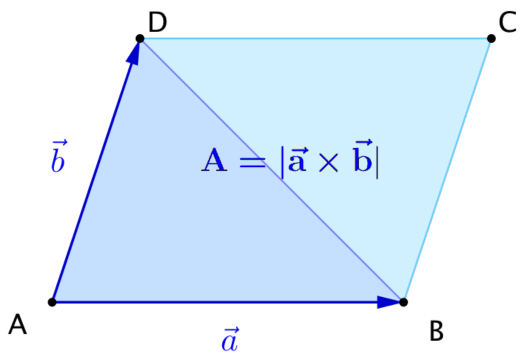
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 1 \cdot (-7) \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -7 \\ -23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6.4 Anwendungen des Vektorproduktes

6.4.1 Berechnung von Flächen

Die Gleichung in der Definition: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ kann man als Fläche des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ABCD deuten. (Abbildung) Damit eignet sich das Vektorprodukt zur Flächenberechnung.



Auch der Flächeninhalt des allgemeinen Dreiecks (hier ABD) lässt sich so leicht berechnen. Er ist genau halb so groß, wie der des Parallelogramms und damit gilt:

Satz 6.4

Der Flächeninhalt des von zwei Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Dreiecks ABC beträgt:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Beispiel 1: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit A(2; 0; 4), B(5; -2; 3) und C(6; 2; 7).

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 169 + 196} = \frac{1}{2}\sqrt{381} \text{ FE}$$

Bemerkung:

Die Dreiecksberechnung auf diese Weise hat gleich mehrere Vorteile. Die Fläche lässt sich exakt berechnen, man kommt ohne Winkelfunktionen aus und sie funktioniert im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ gleichermaßen, wie das folgende Beispiel zeigt. Es ist dabei egal, welche Seiten des Dreiecks man für das Vektorprodukt auswählt.

Beispiel 2: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD mit A(-2; -3), B(5; -2), C(4; 3) und D(-1; 5).

Trick: z = 0 setzen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 36 + \frac{1}{2} \cdot 42 = 39$$

Beispiel 3: Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide ABCD mit A(0; -1; -2); B(4; 4; 0); C(-2; -1; 1) und D(2; 2; 7)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ -25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 24 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}(\sqrt{581} + \sqrt{2150} + \sqrt{693} + \sqrt{2693}) \approx 74,35FE$$

6.4.2 Berechnung von Normalenvektoren

In der analytischen Geometrie besteht häufig die Problematik, dass man einen zu einer ebenen Fläche senkrechten Vektor sucht. Einen solchen Vektor nennt man **Normalenvektor**. Sein Betrag kann dann beispielsweise in seiner Länge entsprechend angepasst als Höhe eines Körpers interpretiert werden. Er selbst könnte zur Bestimmung von Eckpunkten verwendet werden.
Um orthogonale Vektoren zu bestimmen, nutzt man aus, dass das Vektorprodukt einen-Vektor liefert, der orthogonal zu den beiden Ausgangsvektoren ist.

Beispiel 1: Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$ mit möglichst kleinen ganzzahligen Koordinaten, der orthogonal auf der Ebene des Dreiecks ABC mit A(2; 3; 0), B(5; -2; -1) und C(-4; 1; 2) ist. Bestimmen Sie den Betrag des Vektors.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix}$$

Wir dividieren diesen Vektor noch durch (-3) und erhalten:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{n}| = \sqrt{10}$$

Eine Probe mit den Skalarprodukten zeigt, dass $\vec{n}$ diese Bedingungen erfüllt.

Beispiel 2: Gesucht ist ein Normaleneinheitsvektor zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = 7$$

Der gesuchte Einheitsvektor ist dann: $\vec{n}_e = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

6.4.3 Weitere Anwendungen

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^2$ oder des $\mathbb{R}^3$ kann man auch mit Hilfe des Vektorproduktes auf **Parallelität** untersuchen. Es gilt:

Wenn das Vektorprodukt ungleich dem Nullvektor ist, sind die Vektoren nicht parallel.

Beispiel: Untersuchen Sie $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf Parallelität.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} || \vec{b}$$

Winkelberechnung mit dem Vektorprodukt ist zwar auch möglich, ist aber nicht unbedingt eine geeignete Variante, das es stets zwei mögliche Winkel gibt. Wenn man die Formel der Definition umstellt erhält man:

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}\vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Ein Beispiel verdeutlicht das Problem.

Beispiel: Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\sqrt{25 + 1 + 49}}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = 0.9449$$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 70,89^\circ \quad \vee \quad \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 109,11^\circ$$

6.5 Mehrfache Produkte (extra)

6.5.1 Das Spatprodukt

Def 6.2

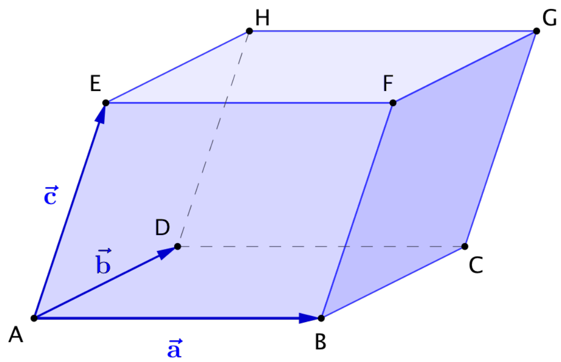
Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$. Dann heißt das Produkt der Form:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c})$$

***Spatprodukt** dieser drei Vektoren.*

Bemerkungen:

1. Der Betrag des Spatproduktes entspricht dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Spats.



2. Das Volumen der von denselben Vektoren aufgespannten dreiseitigen Pyramide ABDE entspricht dann genau einem Sechstel des Betrages des Spatproduktes, womit sich das Produkt zur Berechnung von Rauminhalten gut eignet.

3. Wenn das Spatprodukt positiv ist, bilden die Vektoren ein Rechtssystem, wenn es negativ ist ein Linkssystem.

4. Wenn das Spatprodukt der Vektoren gleich Null ist, sind die Vektoren linear abhängig, ist es ungleich Null sind sie unabhängig.

Beispiel 1: Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c})$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -5$$

Beispiel 2: Gegeben sind die Punkte A(-1; -2; -1), B(3; 2; 1), C(-2; 0; -1) und E(1; -1; 5).
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D, F, G und H, so dass ein Spat ABCDEFGH entsteht. Ermitteln Sie Volumen und Oberflächeninhalt des Spats.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AE} \right| \\ &= \left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= 22\ VE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_O &= \frac{1}{2} \left(\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| + \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right| + \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| + \left| \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| + 2 \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| + 2 \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2\sqrt{164} + 2\sqrt{953} + 2\sqrt{1220} \\ &\approx 157,2\ FE \end{aligned}$$

Beispiel 3: Gegeben sind die Punkte A(-1; 2; -2), B(3; 4; 0), C(1; 3; 1) und D(3; 1; 4).
Zeigen Sie, dass die Punkte ein Tetraeder ABCD bilden und berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \circ \overrightarrow{AD}\right| \\
&= \left|\left(\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}4\\-8\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\-1\\6\end{pmatrix}\right| \\
&= 4\,VE
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_O &= \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{80} + \sqrt{596} + \sqrt{117} + \sqrt{101}) \\
&\approx 27,1\ FE
\end{aligned}
$$

6.5.2 Die bac-cab-Regel

Das Kreuzprodukt aus drei Vektoren kann man auf zwei Skalarprodukte verbunden mit der S-Multiplikation zurückführen. Eine Regel, die besonders in der Physik Anwendung findet, ist die sogenannte **bac-cab-Regel**.

Satz 6.5

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_1c_3 - b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= \begin{pmatrix} b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_1b_1 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_2c_2 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_2b_2 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 + b_3a_3c_3 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 - c_3a_3b_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_1c_3 - b_3c_1) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Übereinstimmung der Terme bestätigt die Gleichheit beider Ausdrücke.

6.5.3 Die Jacobi-Identität

Für das Rechnen mit mehrfachen Produkten kann man manchmal die folgende Beziehung nutzen, die auch **Jacobi-Identität** genannt wird.

Satz 6.6

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Beweis:

Wir verwenden die bac-cab-Regel und das Kommutativgesetz des Skalarproduktes und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \\
= & \ \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{c}(\vec{b} \circ \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \circ \vec{c}) + \vec{a}(\vec{c} \circ \vec{b}) - \vec{b}(\vec{c} \circ \vec{a}) \\
= & \ \vec{a}(\vec{b} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{b}) \\
= & \ \vec{a} \cdot 0 + \vec{b} \cdot 0 + \vec{c} \cdot 0 \\
= & \ \vec{0}
\end{aligned}$$