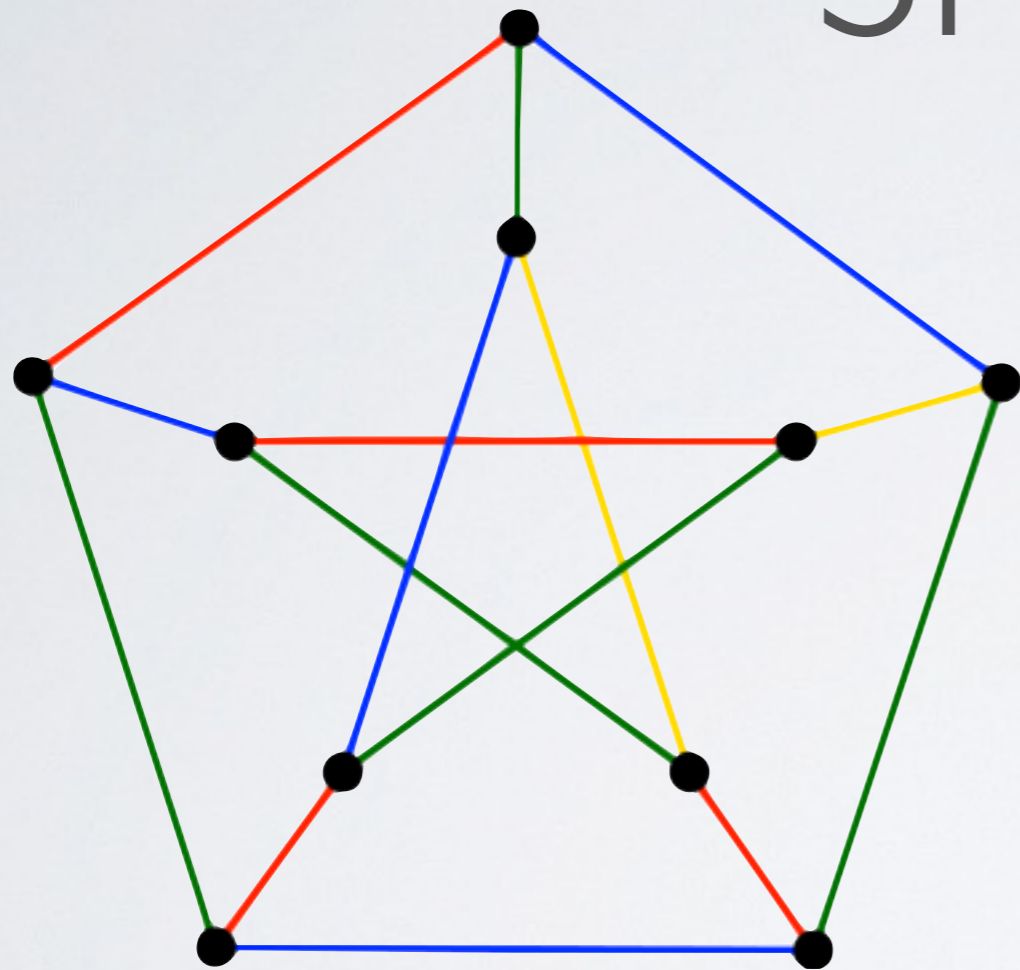


Auf der Jagd nach dem SNARK



Ein Ausflug
in die
Graphentheorie

Olaf Schimmel
Ulf-Merbold-Gymnasium Greiz

Was haben wir vor ?

1. Die SNARK-Vermutung
2. **S**, wie **S**chlichter Graph
3. **N**, wie **N**achbarschaftsgraph
4. **A**, wie **A**nhangslos
5. **R**, wie **R**egulär
6. **K**, wie **K**ubisch
7. SNARK-Kandidaten und Färbungen
8. SNARK-Graphen

I Die SNARK-Vermutung

Lewis Carroll (1832 - 1898)

„Alice im Wunderland“

„The hunting of the **Snark**“

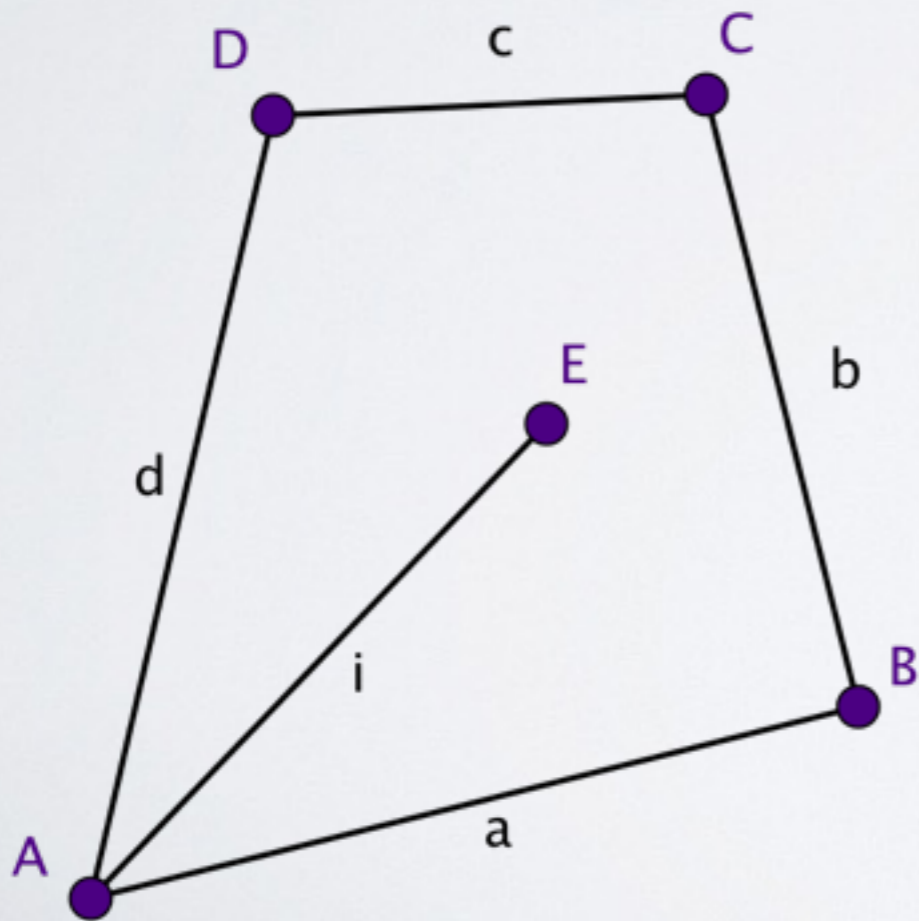
Gibt es einen schlichten, zusammenhängenden, anhangslosen, regulären, kubischen Graphen, zu dessen Kantenfärbung man nicht weniger als vier Farben benötigt?

2 **S**, wie **s**chlichter Graph

Definition I

Eine Menge von Punkten und Linien, die jeweils genau zwei Punkte verbinden, heißt **Graph**.

Die Punkte heißen **Knoten**, die Linien heißen **Kanten** des Graphen.



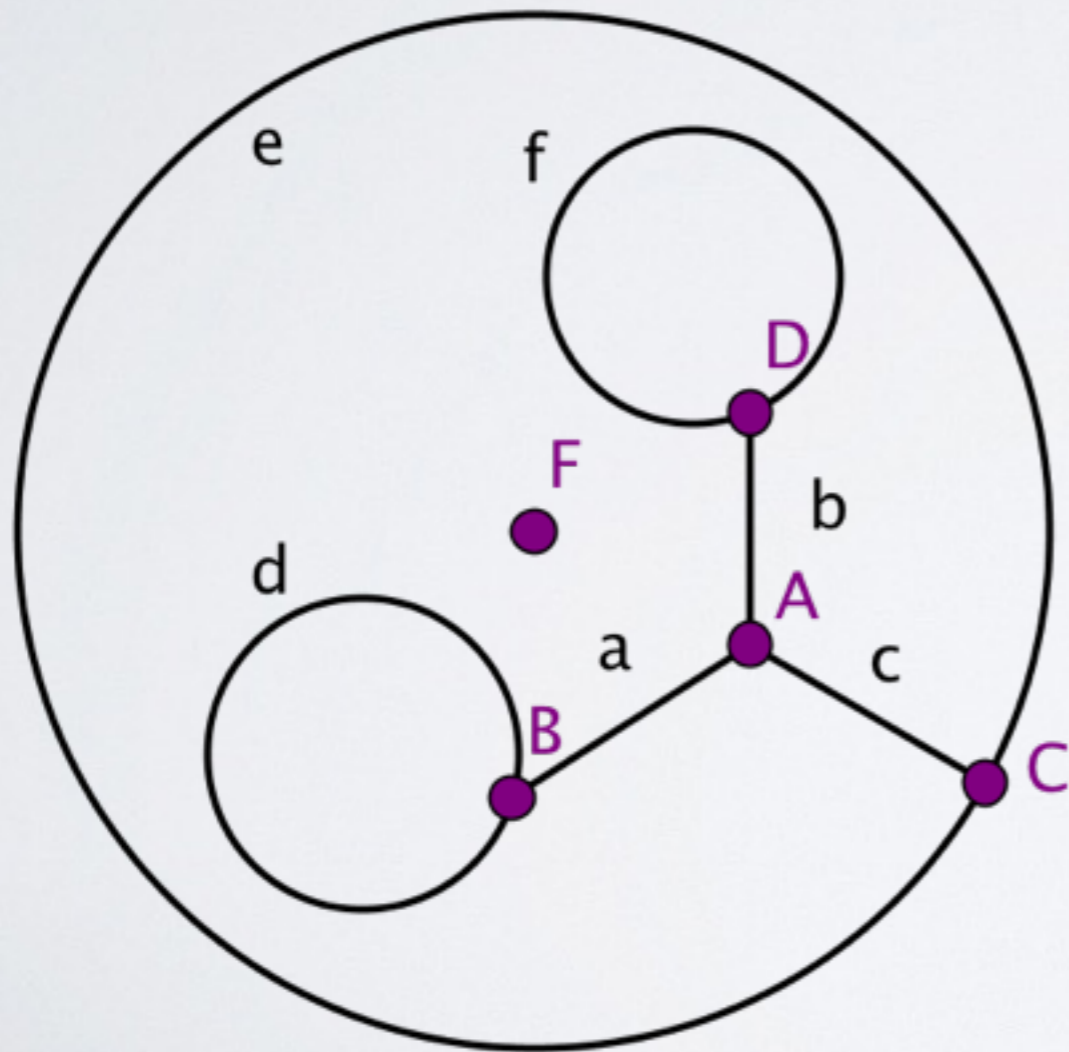
Knoten: A, B, C, D, E

Kanten: a, b, c, d, i

2 **S**, wie **s**chlichter Graph

Definition 2

Eine Kante heißt **Schlinge**, wenn sie in demselben Knoten beginnt und endet.

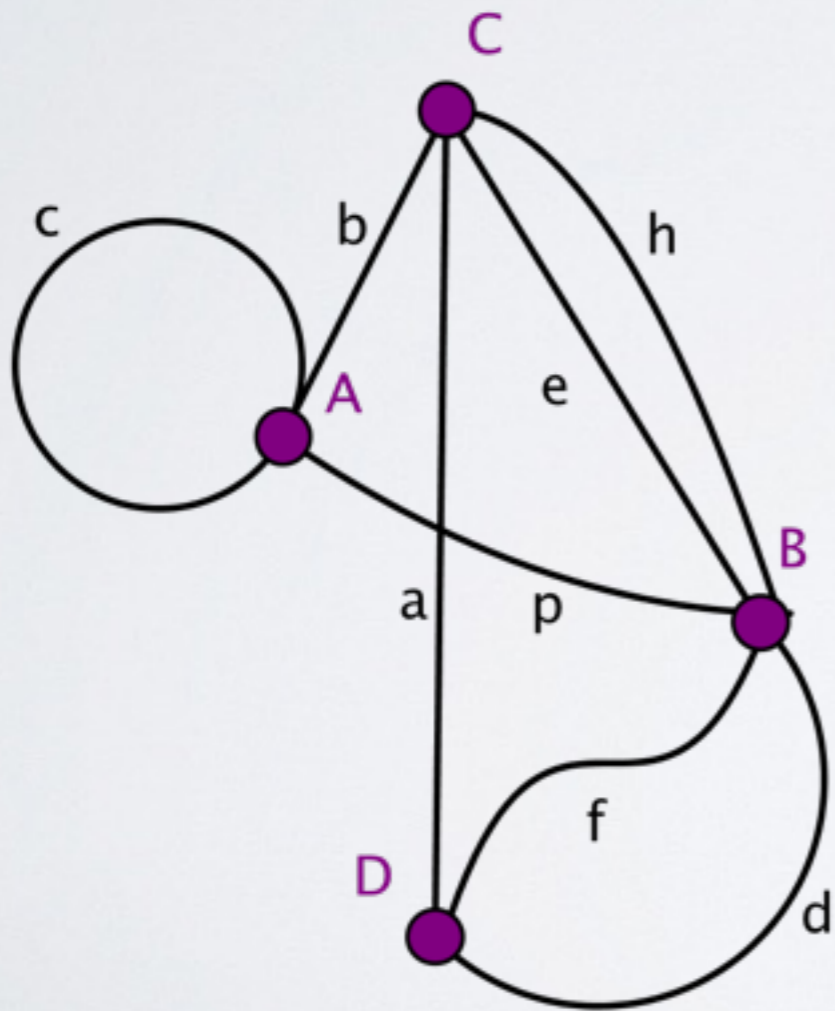


Die Kanten
d, e und f
sind Schlingen.

2 **S**, wie **s**chlichter Graph

Definition 3

Zwei Kanten heißen **parallel**, wenn sie dieselben Knoten verbinden.



Es gilt:

$e \parallel h$

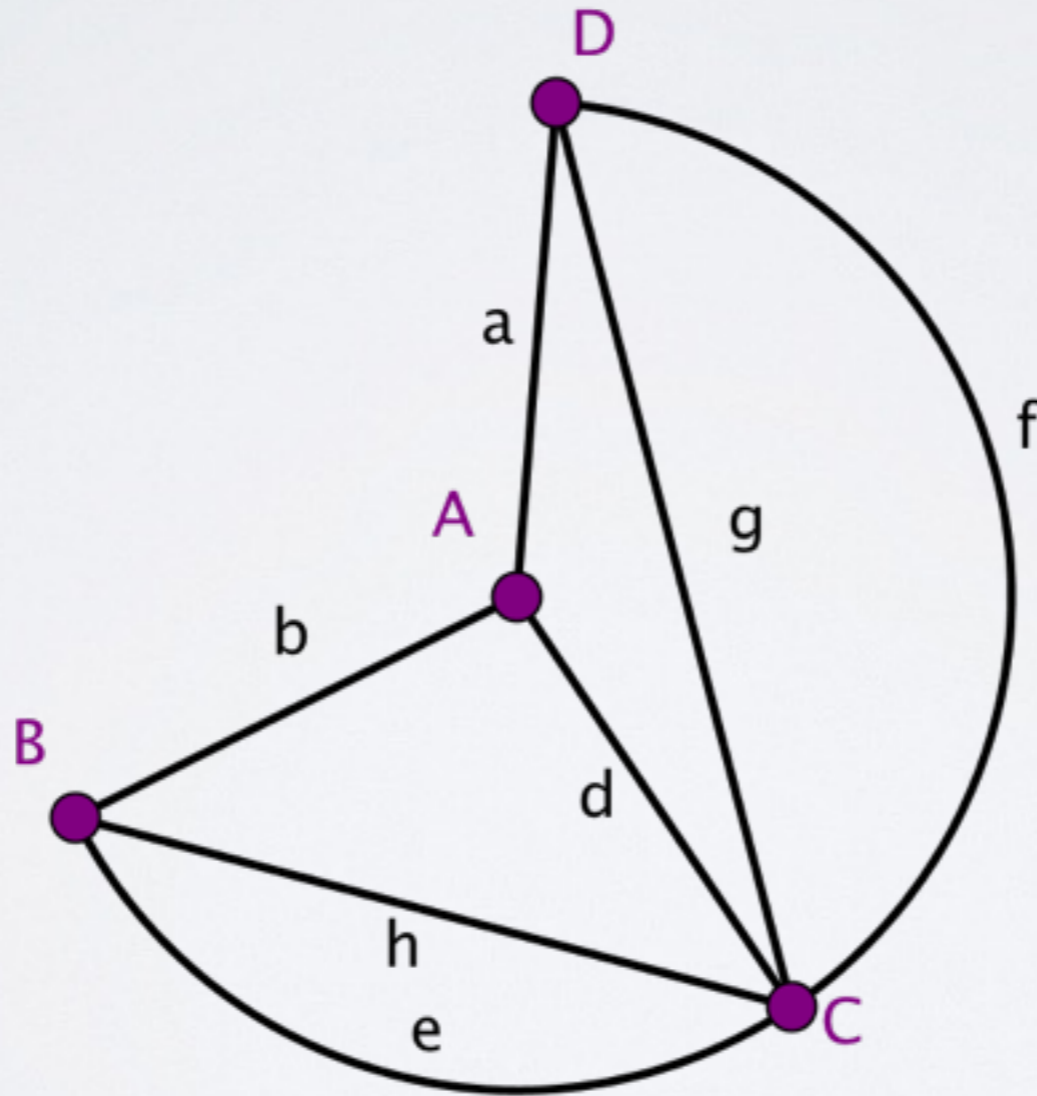
und

$d \parallel f$

2 **S**, wie **s**chlichter Graph

Beispiel:

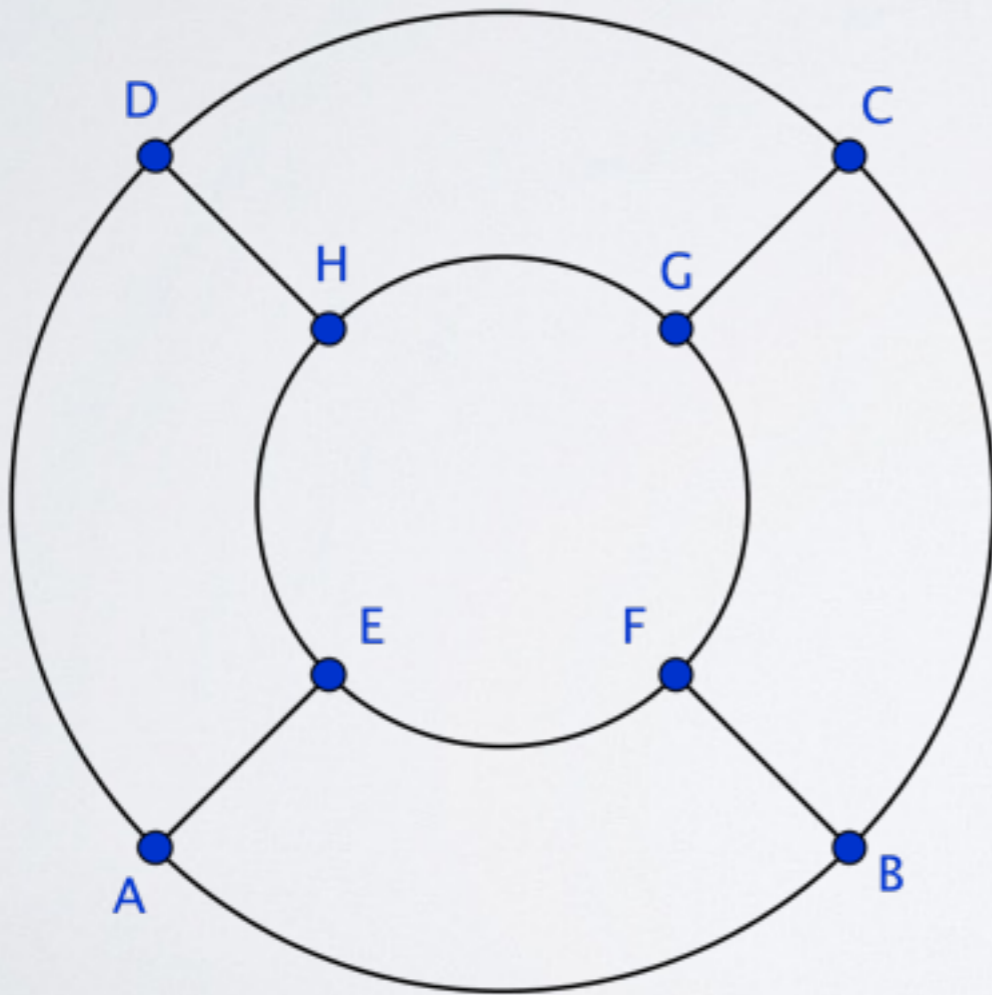
Gib alle Knoten und Kanten an!
Welche Kanten sind parallel?



2 **S**, wie **schlichter** Graph

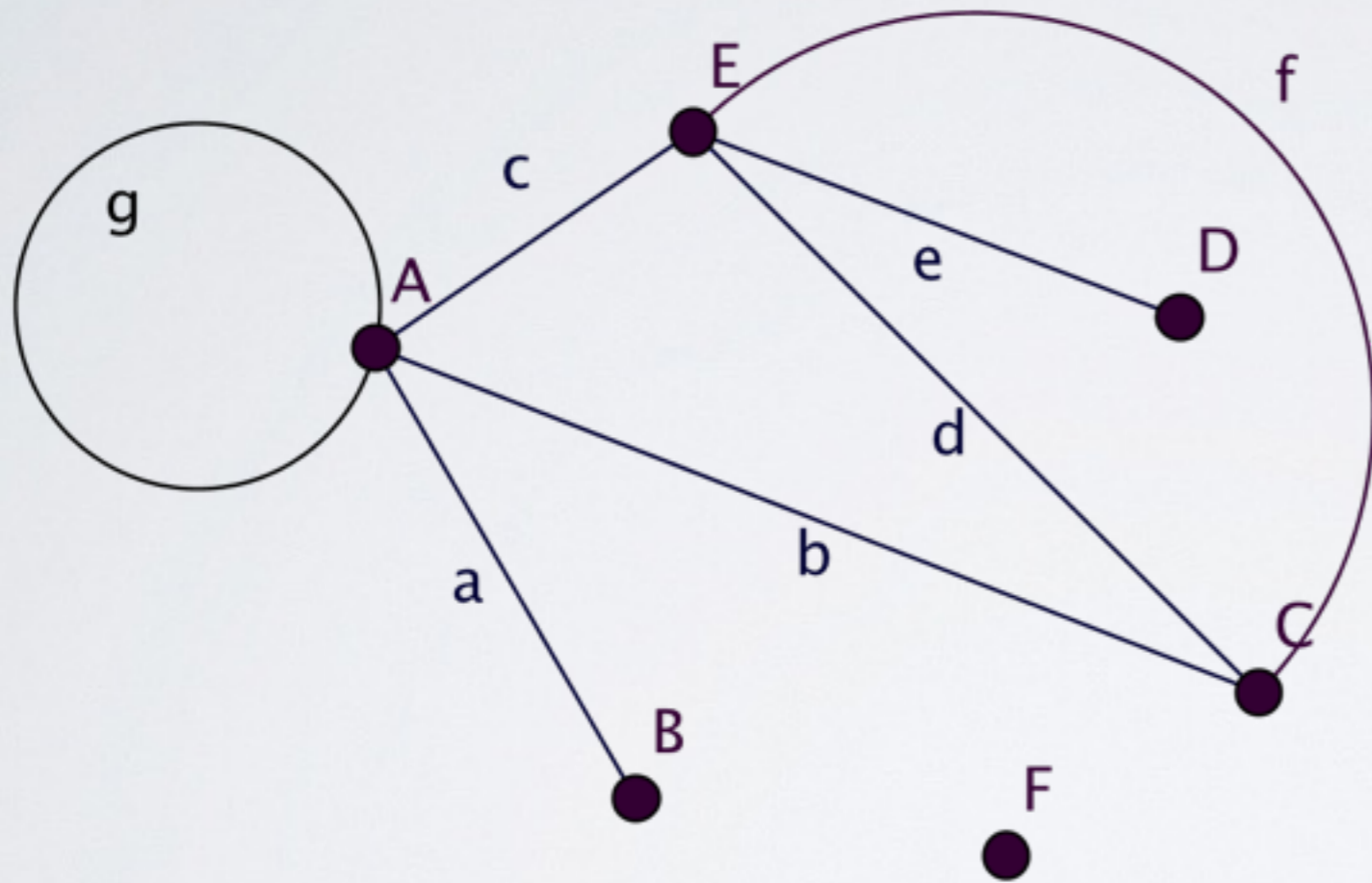
Definition 4

Ein Graph heißt **schlicht**, wenn er weder Schlingen, noch parallele Kanten enthält.



Dieser Graph ist schlicht.

2 **S**, wie **schlichter Graph**

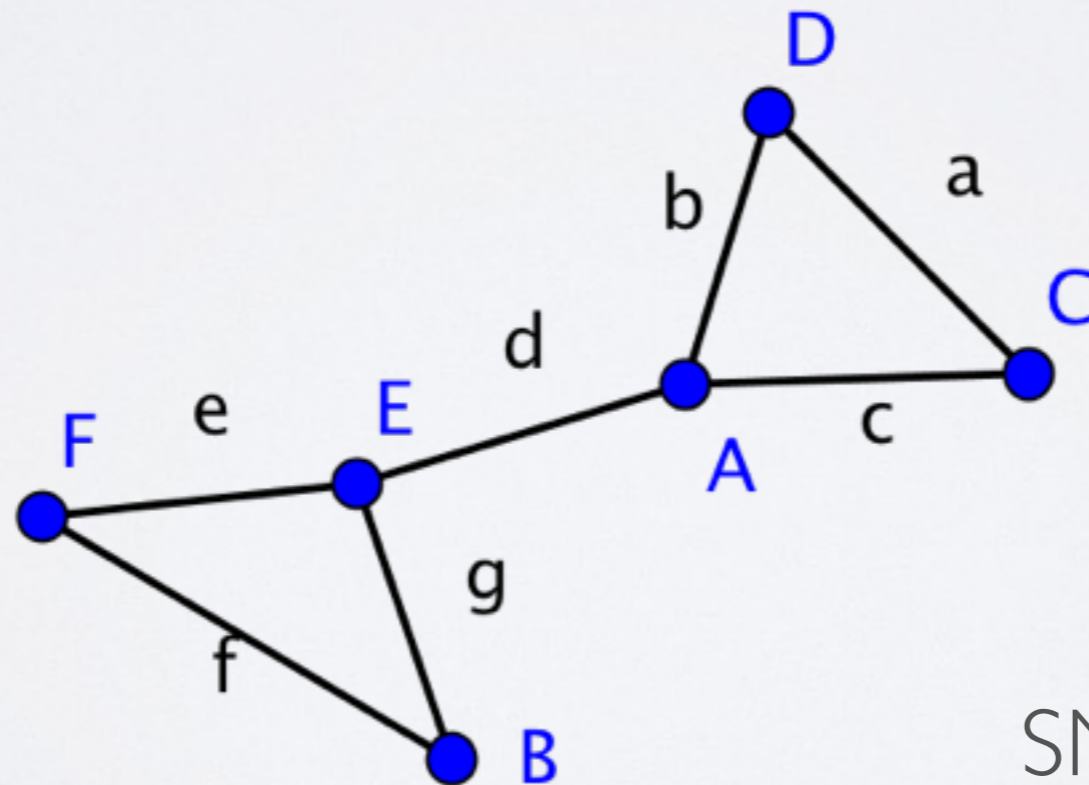


Der ist es nicht.

3 **N**, wie **N**achbarschaftsgraph

Definition 5

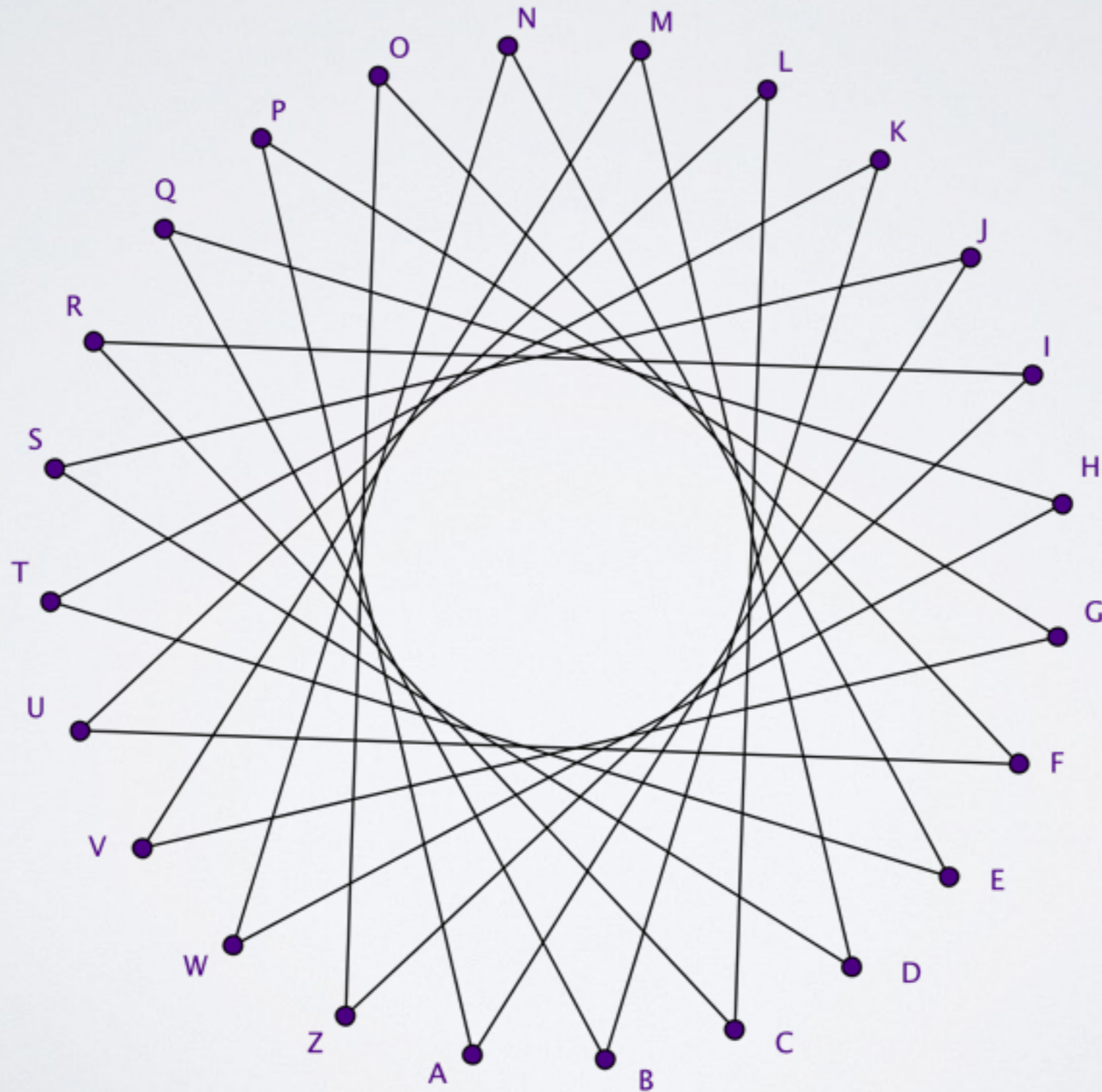
Ein Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten (mindestens) eine Kantenfolge gibt. Ein zusammenhängender Graph heißt auch **Nachbarschaftsgraph**.



SN-Graph

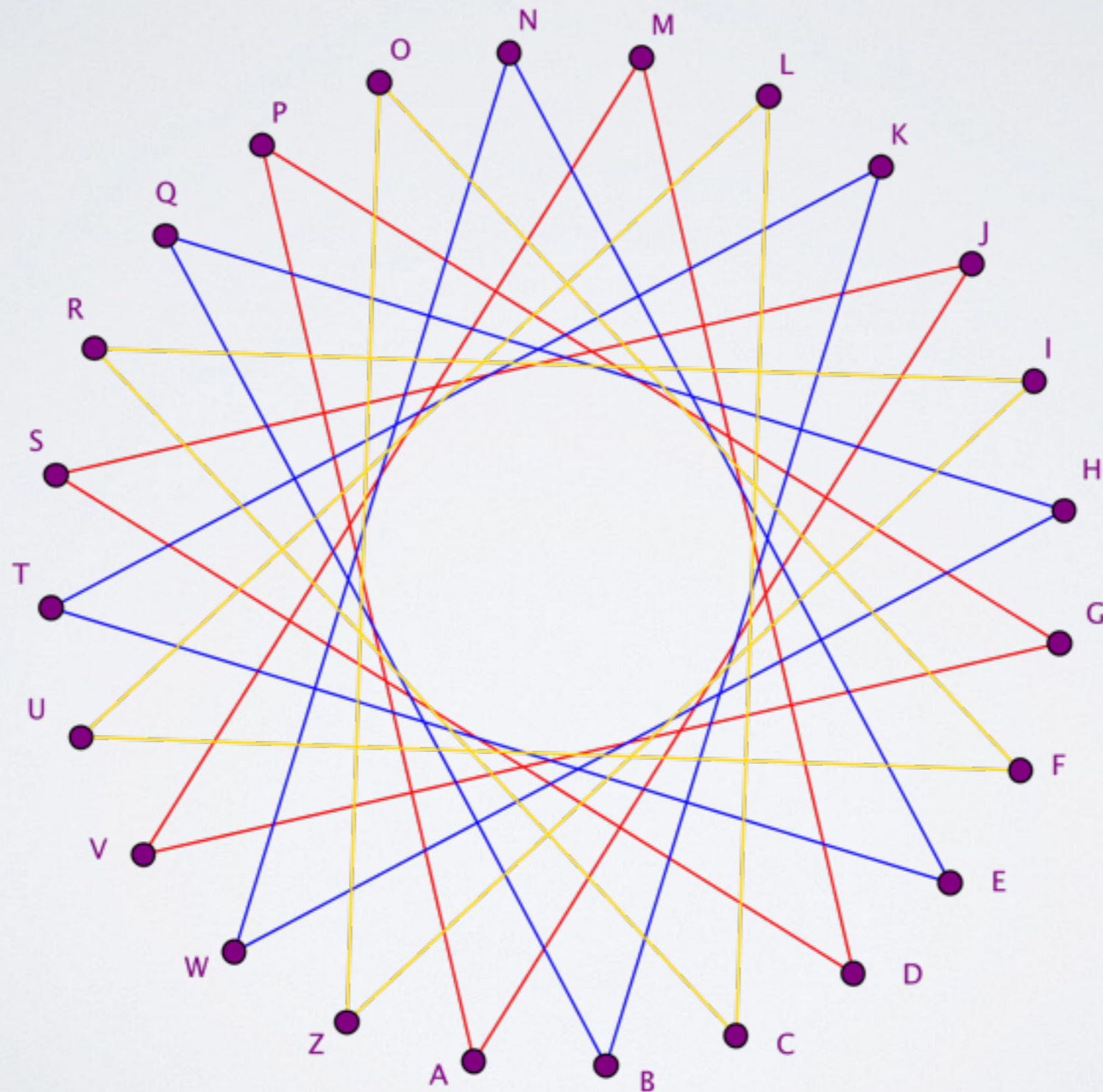
3 **N**, wie **N**achbarschaftsgraph

Nicht immer ist der Zusammenhang leicht erkennbar:



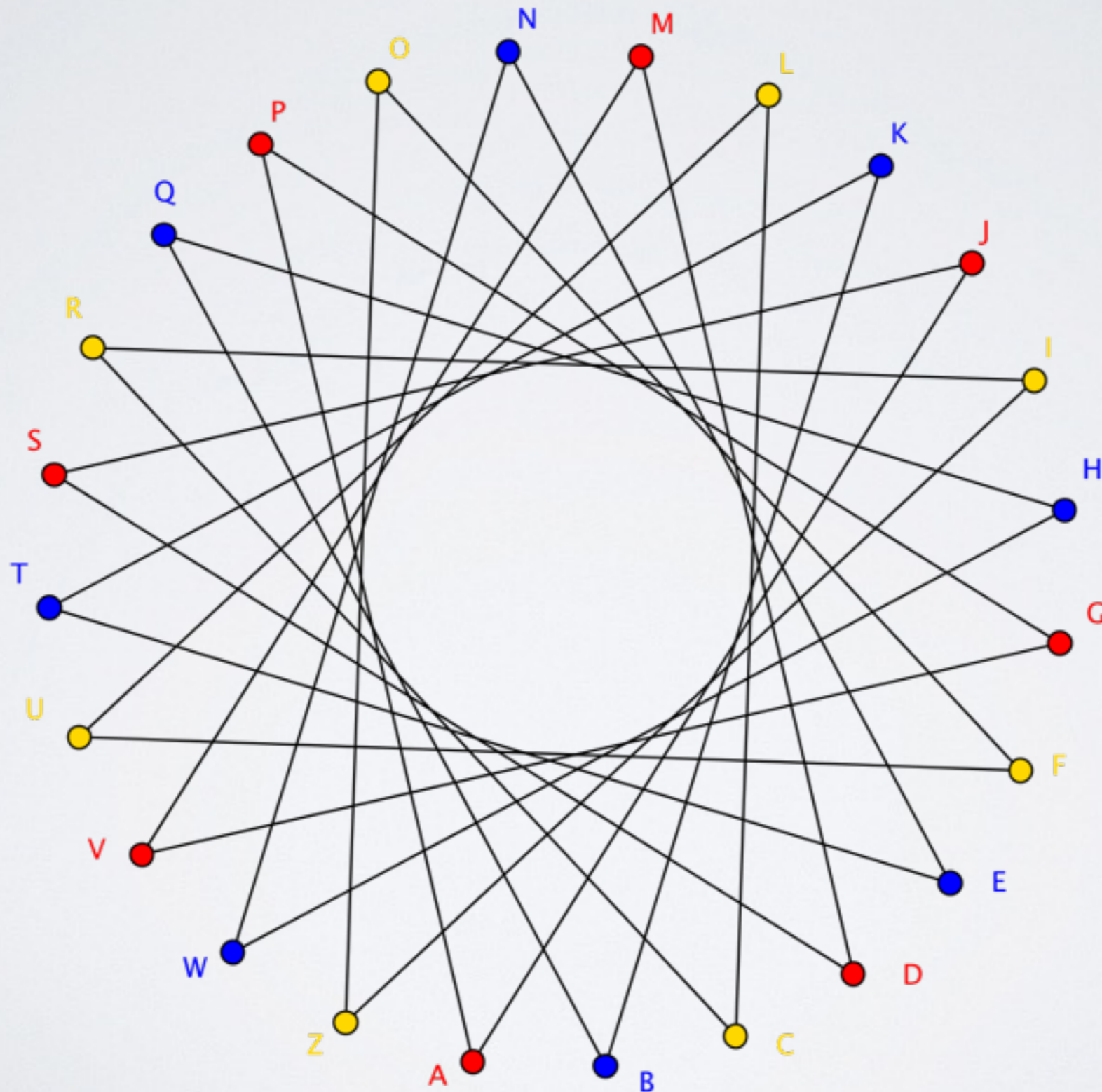
3 **N**, wie **N**achbarschaftsgraph

Kantenfärbung verschafft Übersicht:



3 N, wie N Nachbarschaftsgraph

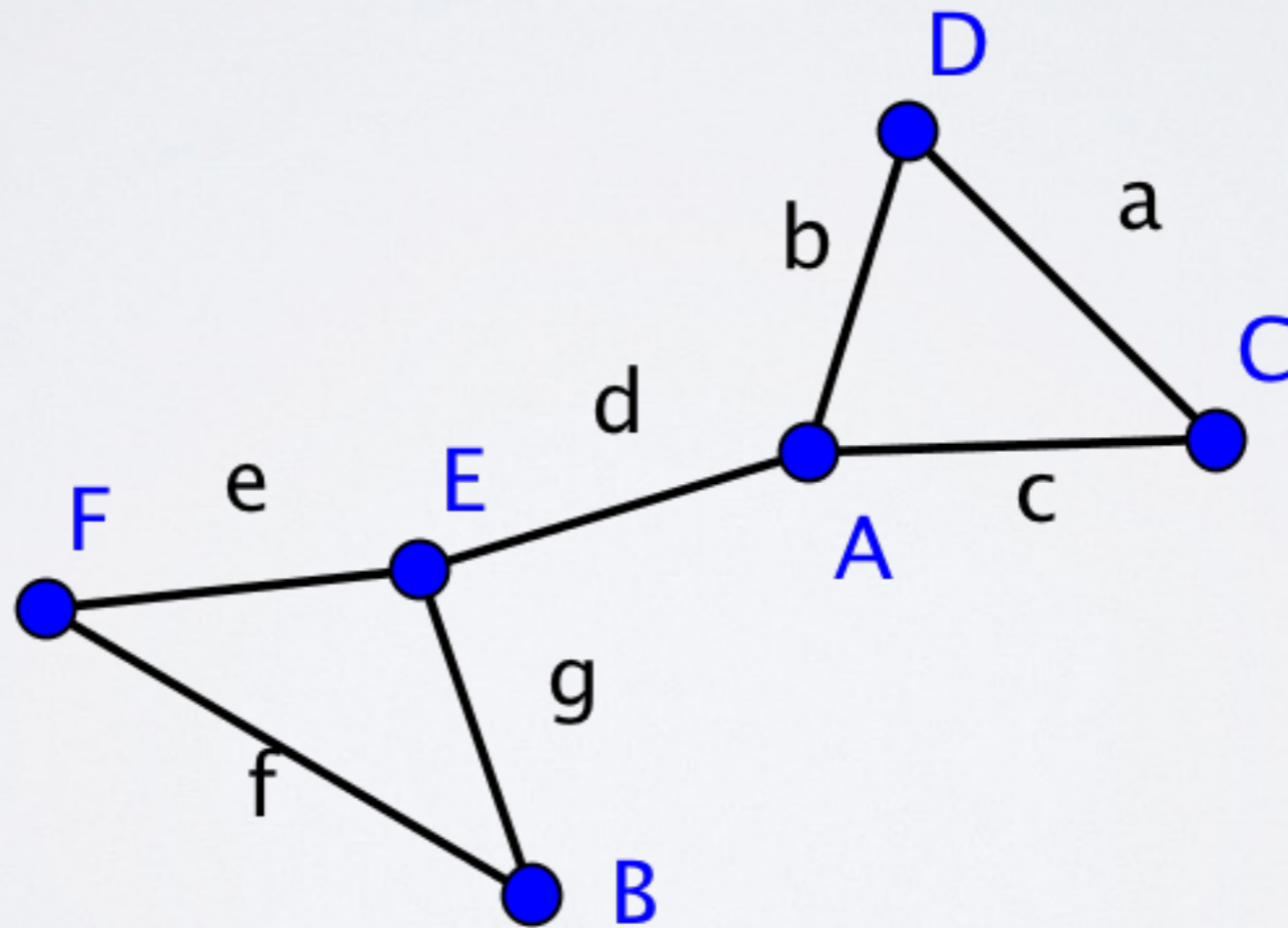
Knotenfärbung wäre auch eine Möglichkeit:



4 **A**, wie **a**nhangslos

Definition 7

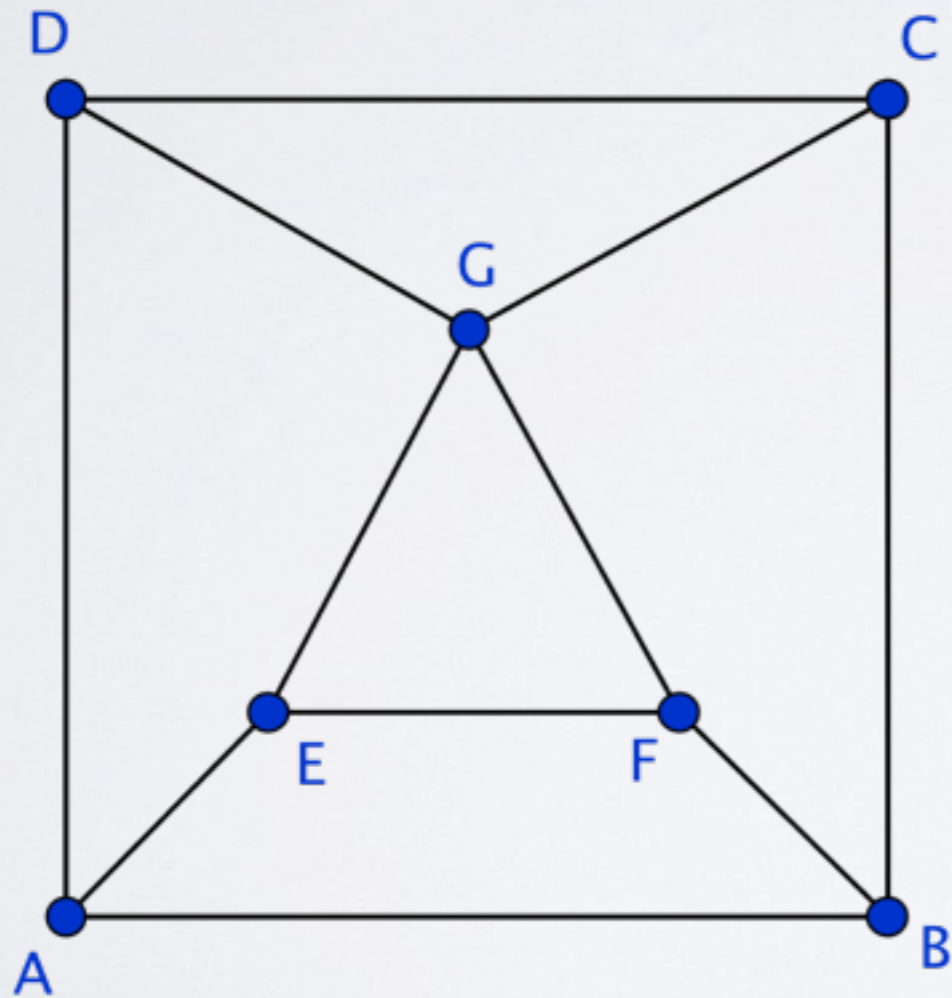
Ein Kante heißt **Brücke**, wenn durch ihre Entfernung aus dem Graphen sein **Zusammenhang** verloren geht.



4 **A**, wie **a**nhangslos

Definition 8

Ein Graph heißt **anhangslos**, wenn er keine Brücken enthält.

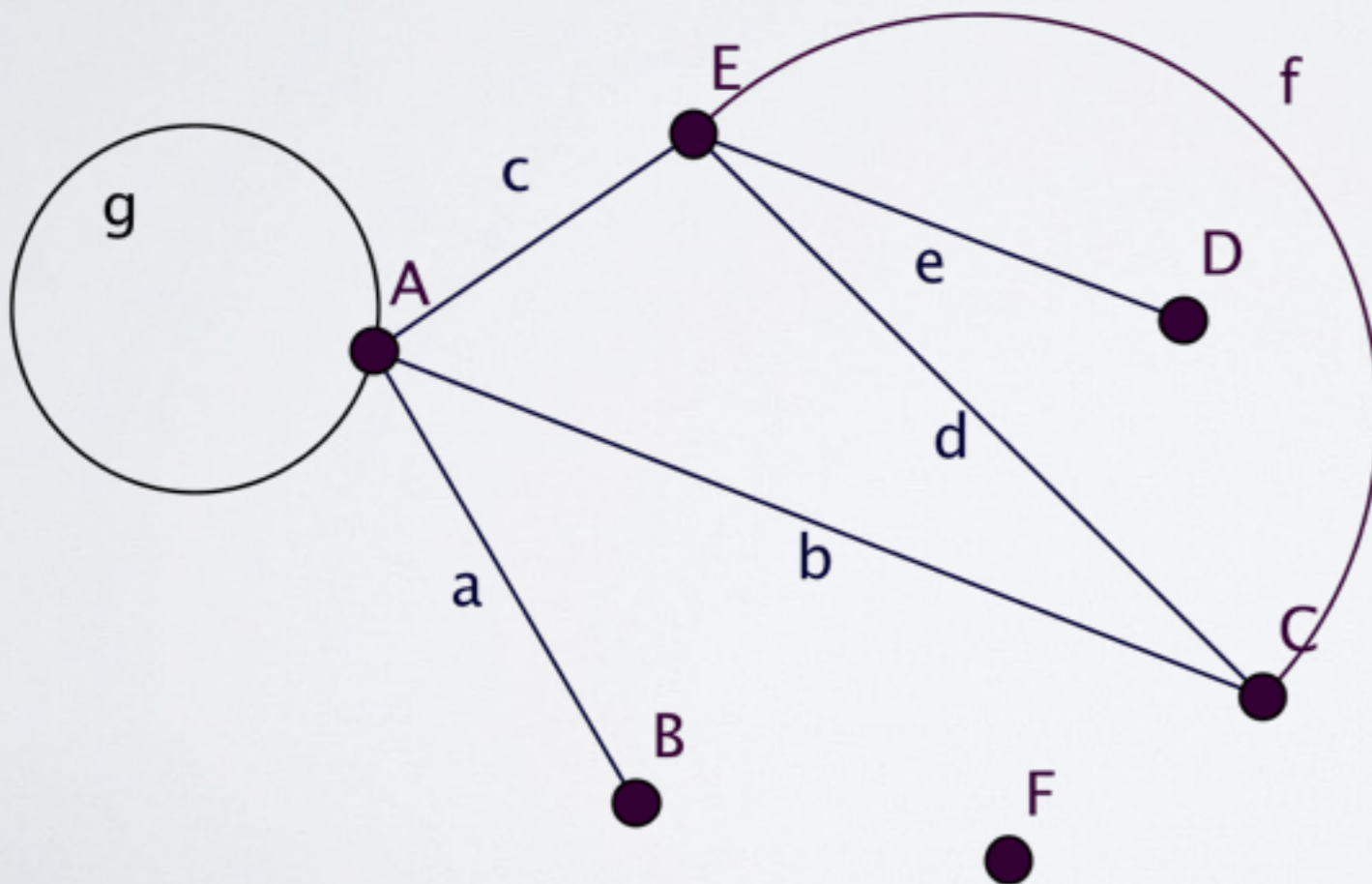


SNA-Graph

5 **R**, wie **r**egulär

Definition 9

Die Anzahl der an einem Knoten anliegenden Kantenenden heißt **Knotengrad** des Knotens.

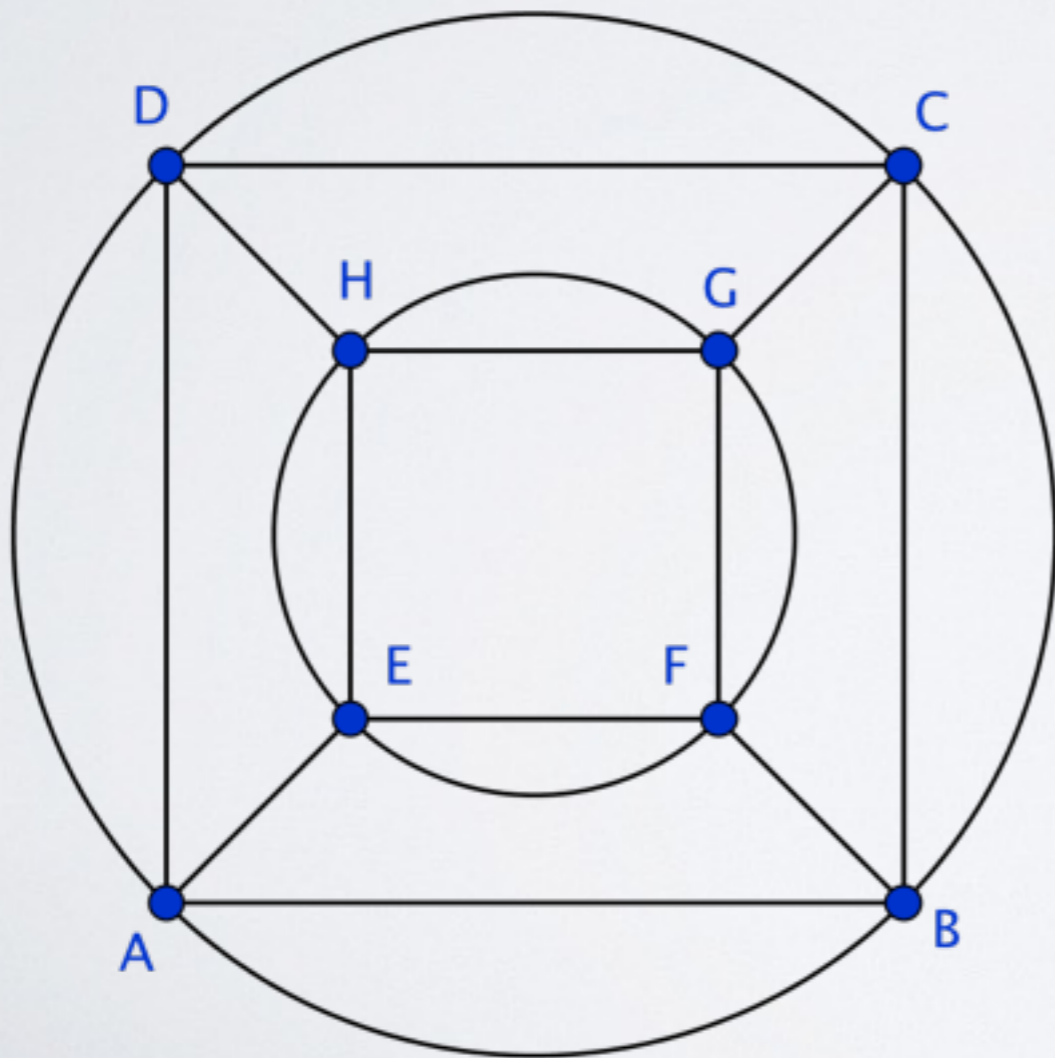


Knoten	Knotengrad
A	5
B	1
C	3
D	1
E	4
F	0
Summe	14

5 **R**, wie **r**egulär

Definition 10

Ein Graph heißt **regulär**, wenn jeder Knoten des Graphen denselben Knotengrad besitzt.

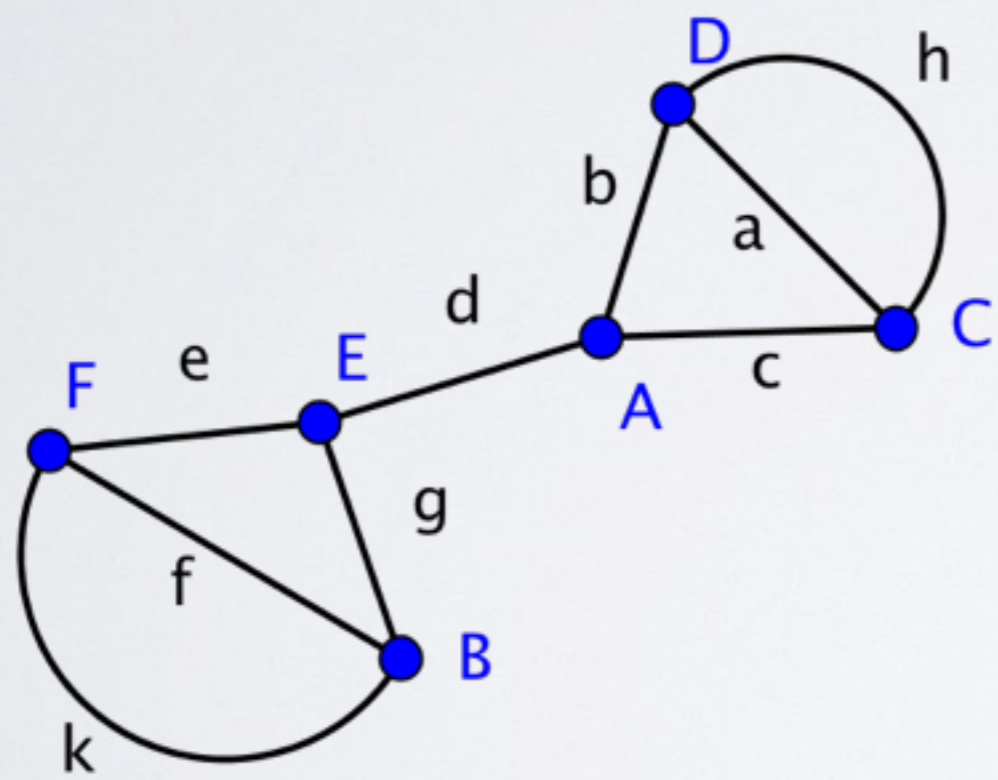


NAR-Graph

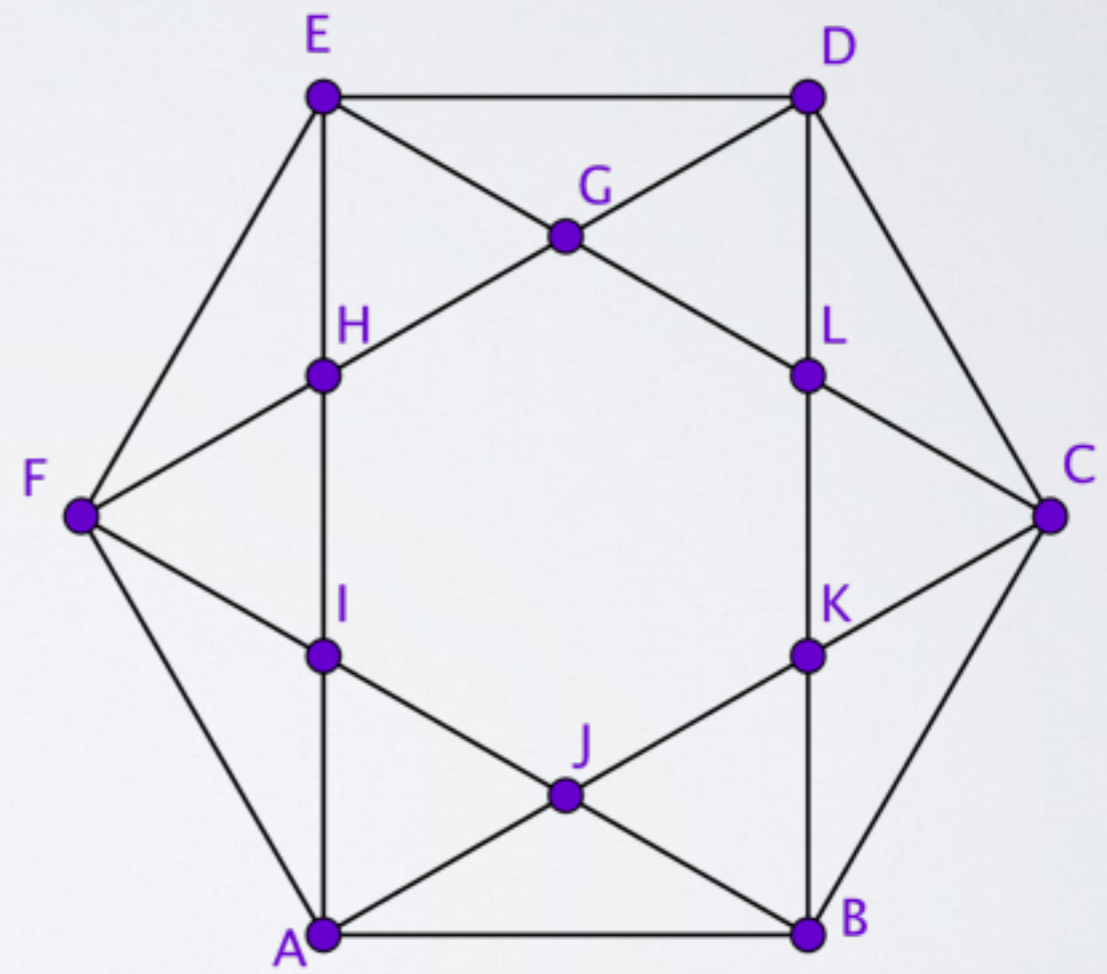
6 **K**, wie **k**ubisch

Definition 11

Ein Graph heißt **kubisch**, wenn jeder Knoten des Graphen den Knotengrad 3 besitzt.



NRK-Graph

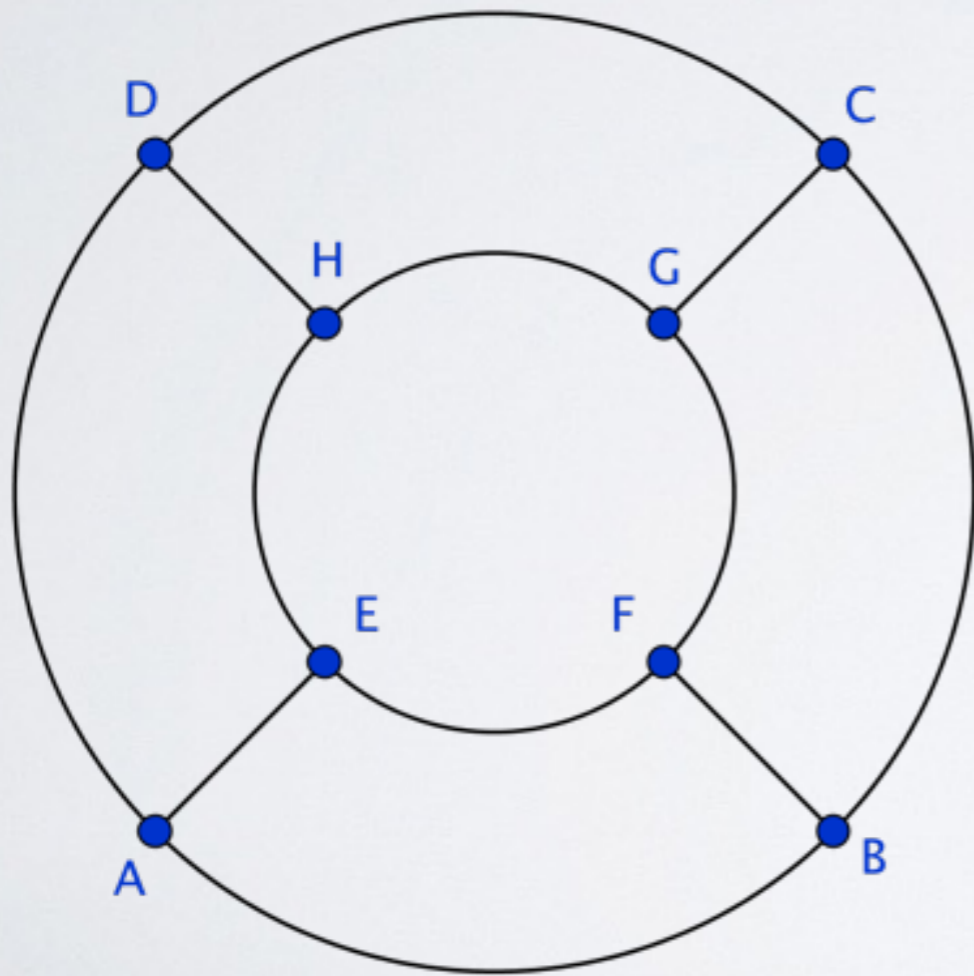


SNAR-Graph

7 SNARK-Kandidaten

Definition 12

Einen Graphen, der die Eigenschaften S, N, A, R und K besitzt, nennen wir **SNARK-Kandidaten**.

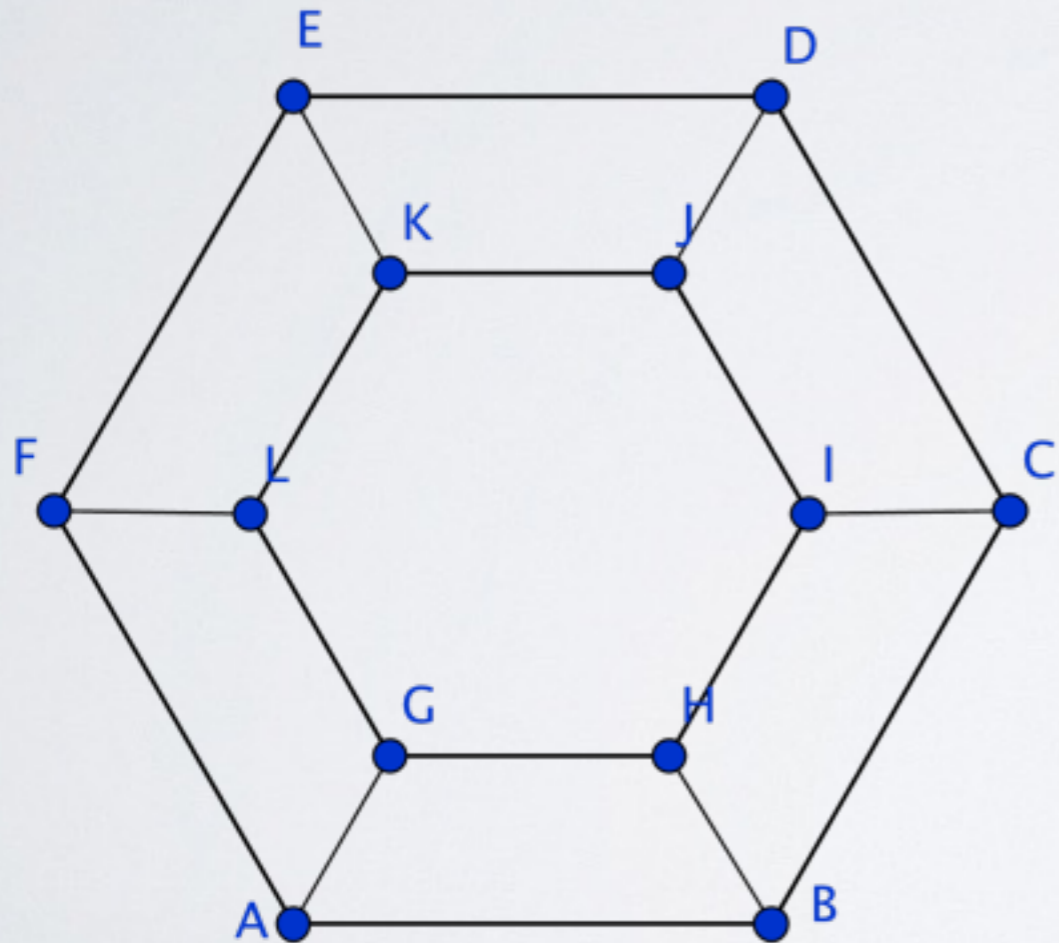


SNARK-Kandidat

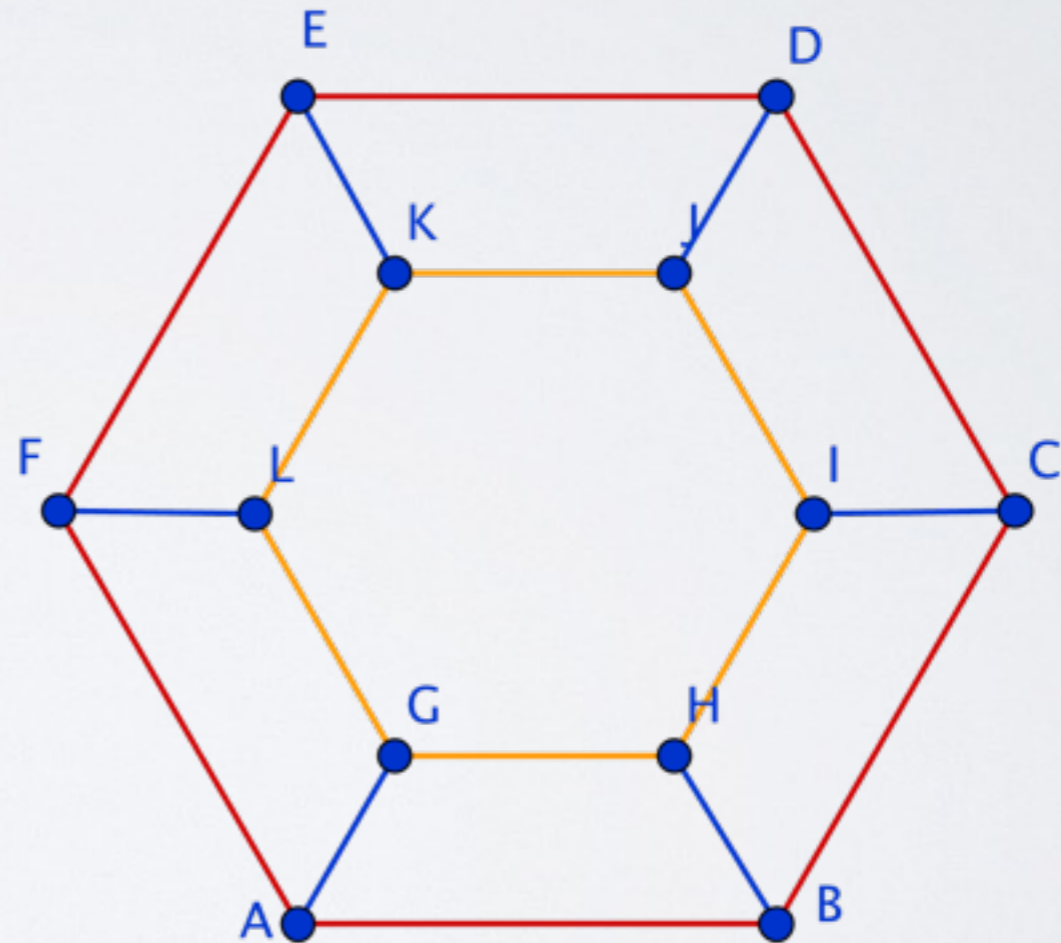
7 SNARK-Kandidaten

Definition 13

Ein SNARK-Kandidat, zu dessen Kantenfärbung man nicht weniger als vier Farben benötigt, heißt **SNARK-Graph**.



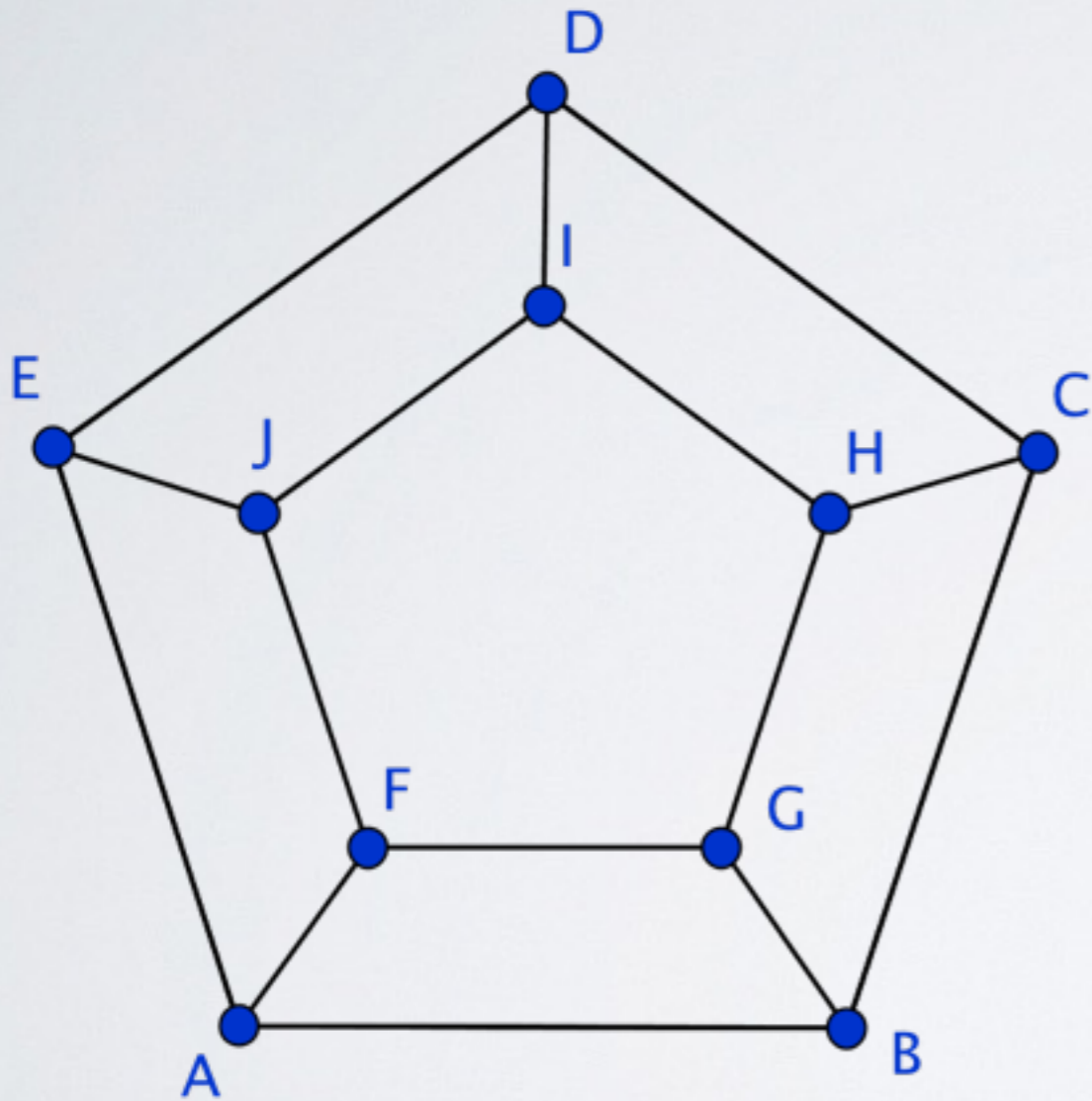
Ist das ein SNARK?



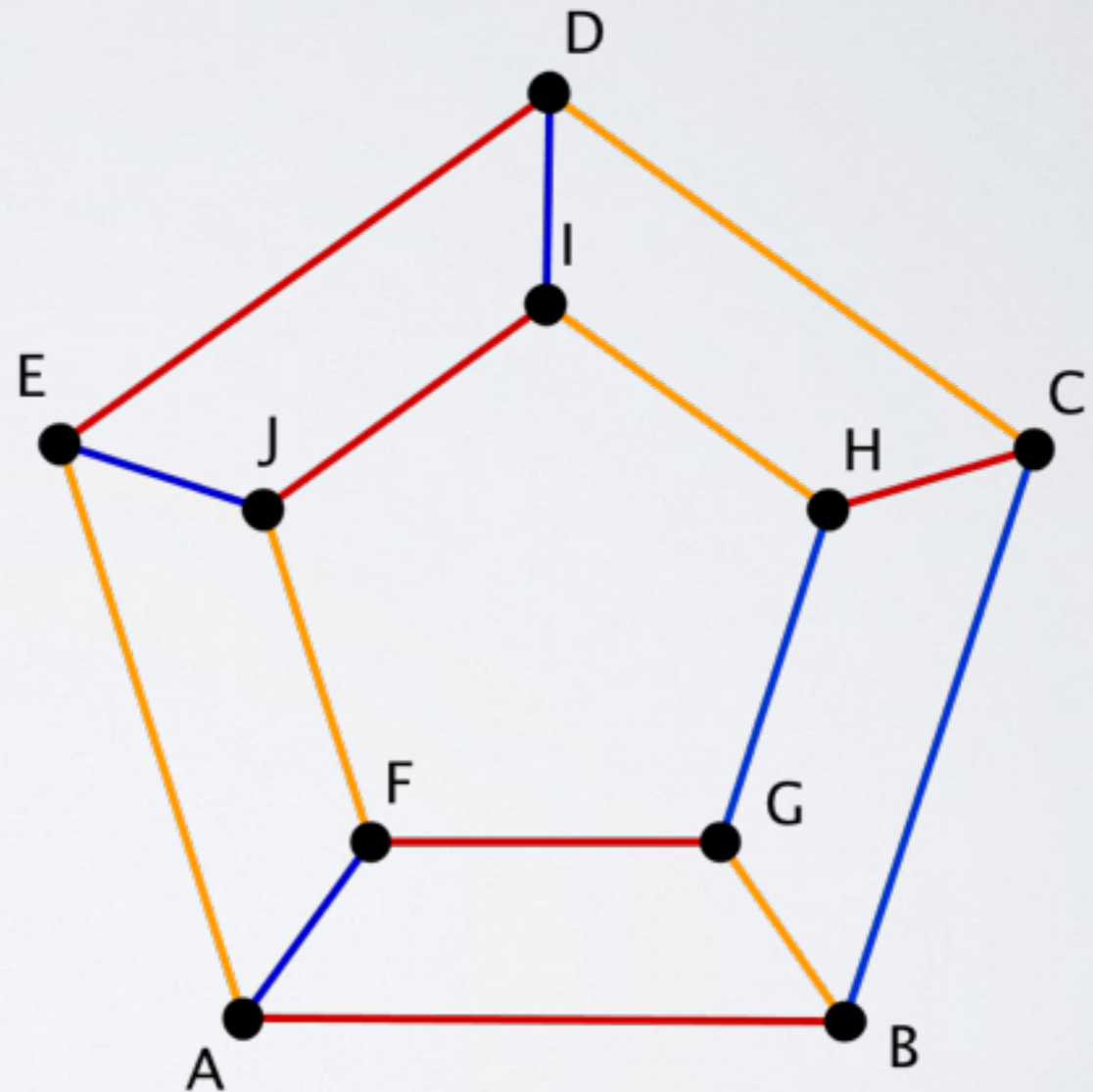
Leider nicht.

7 SNARK-Kandidaten

Die Kantenfärbung macht es schwierig.



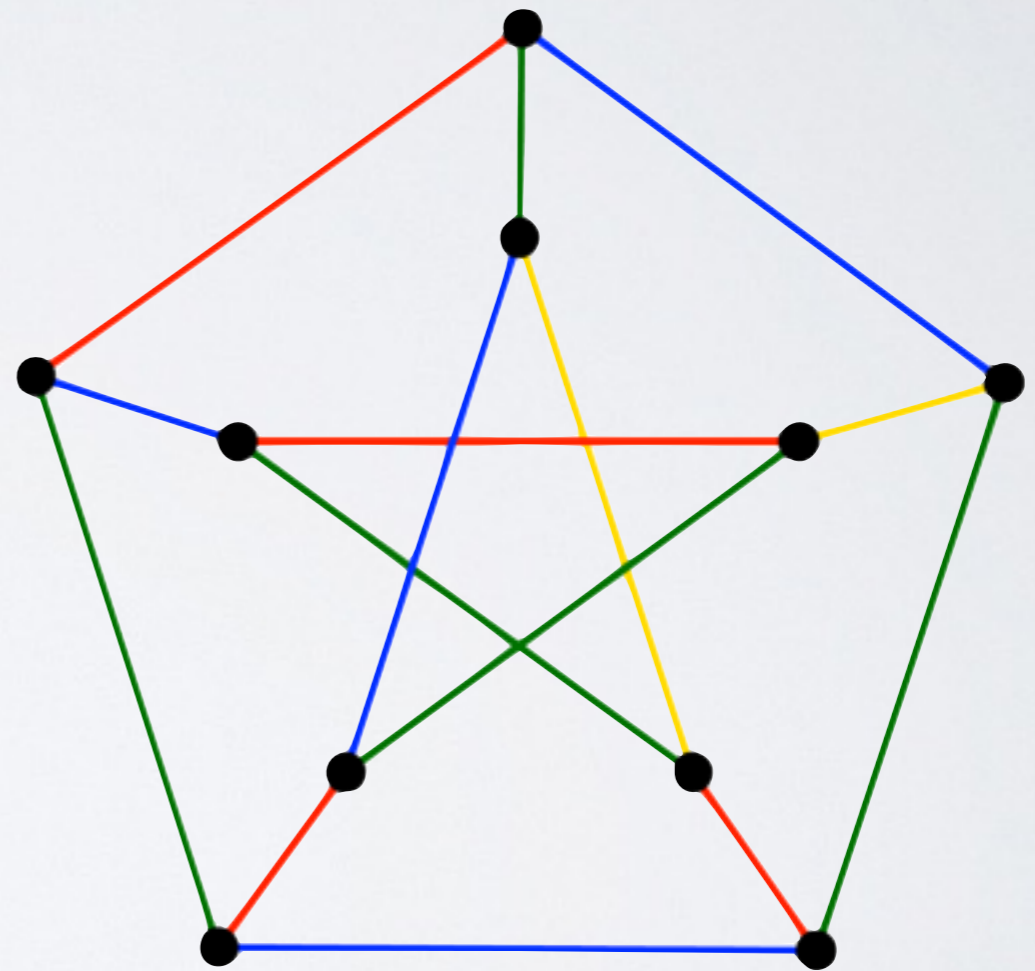
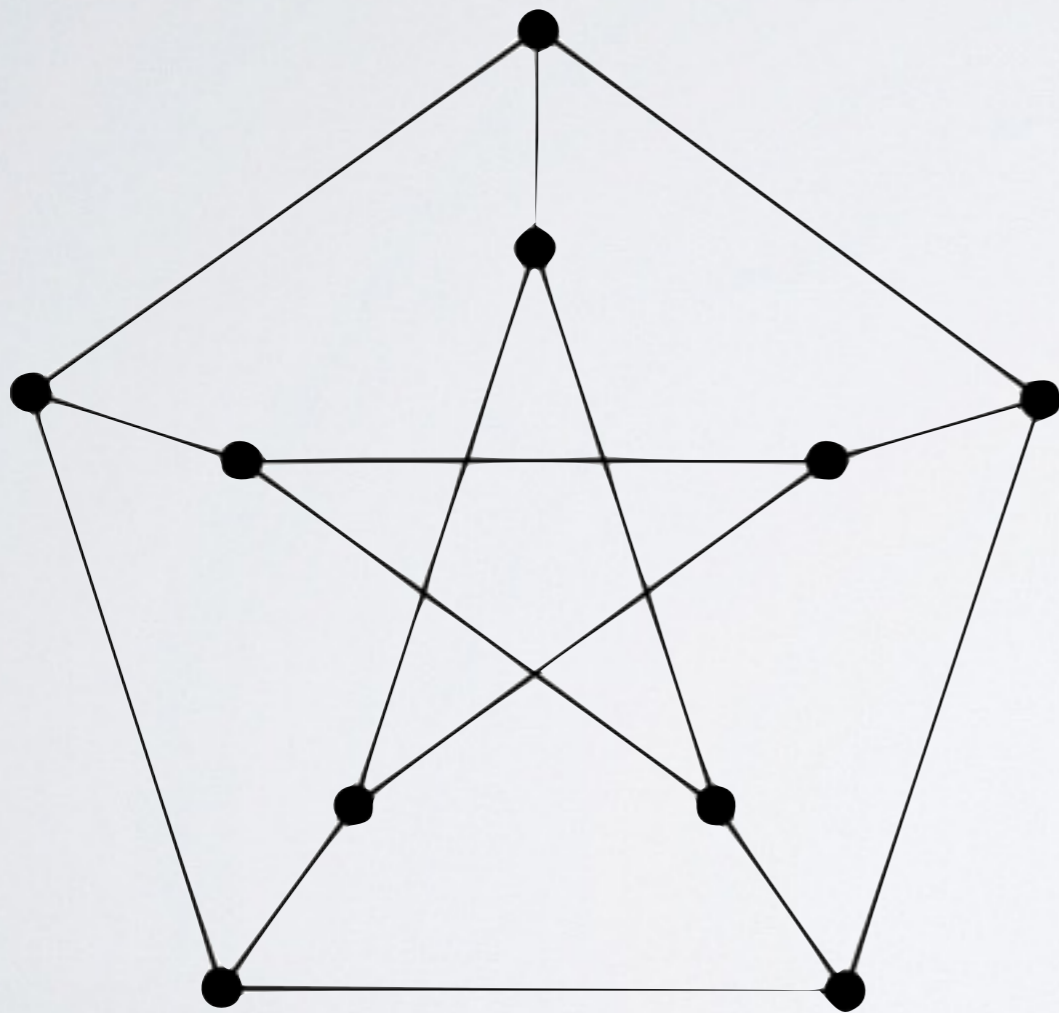
Ist das ein SNARK?



Leider auch nicht.

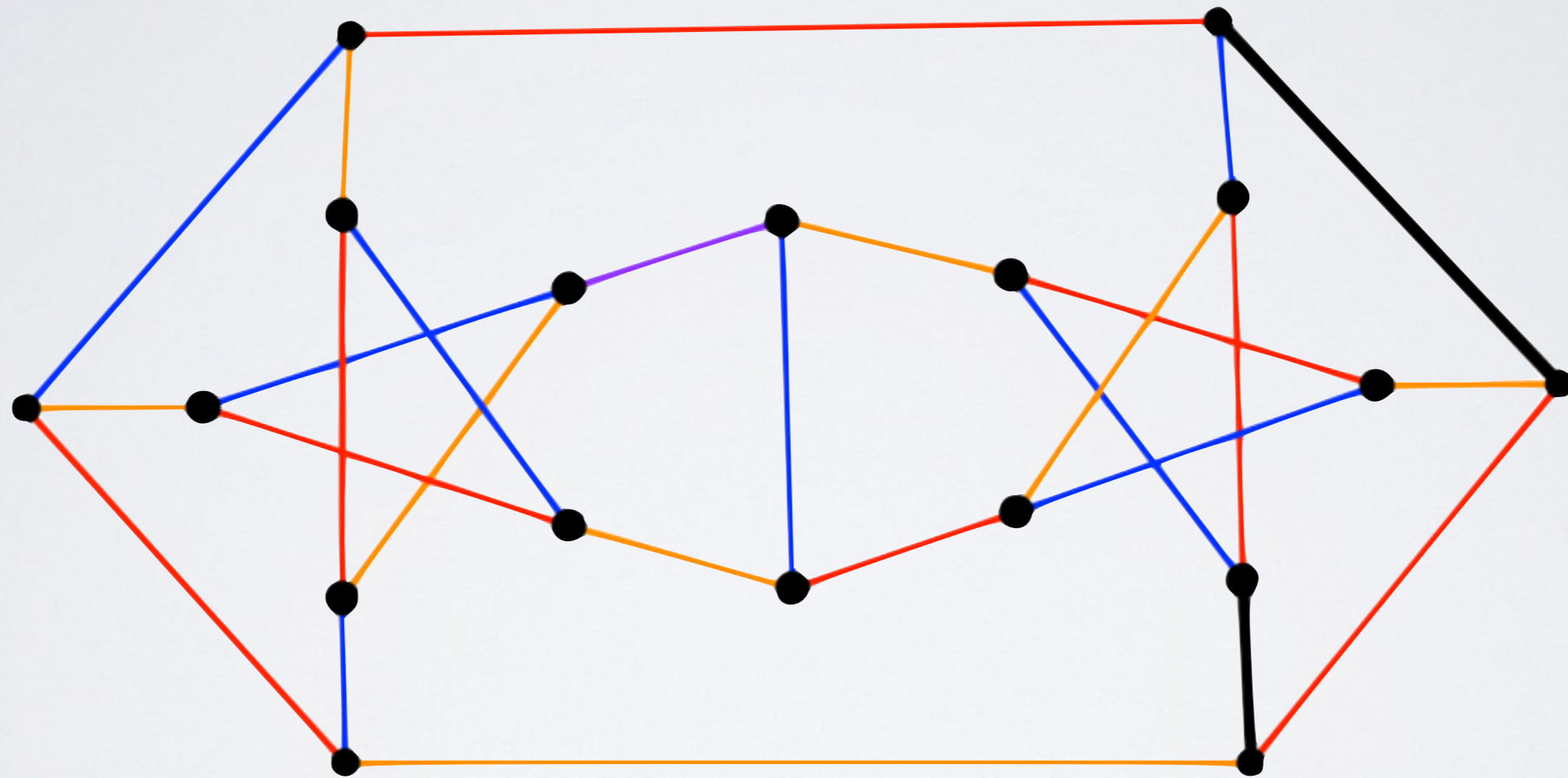
8 SNARK-Graphen

Petersen-SNARK (Julius Petersen 1891)



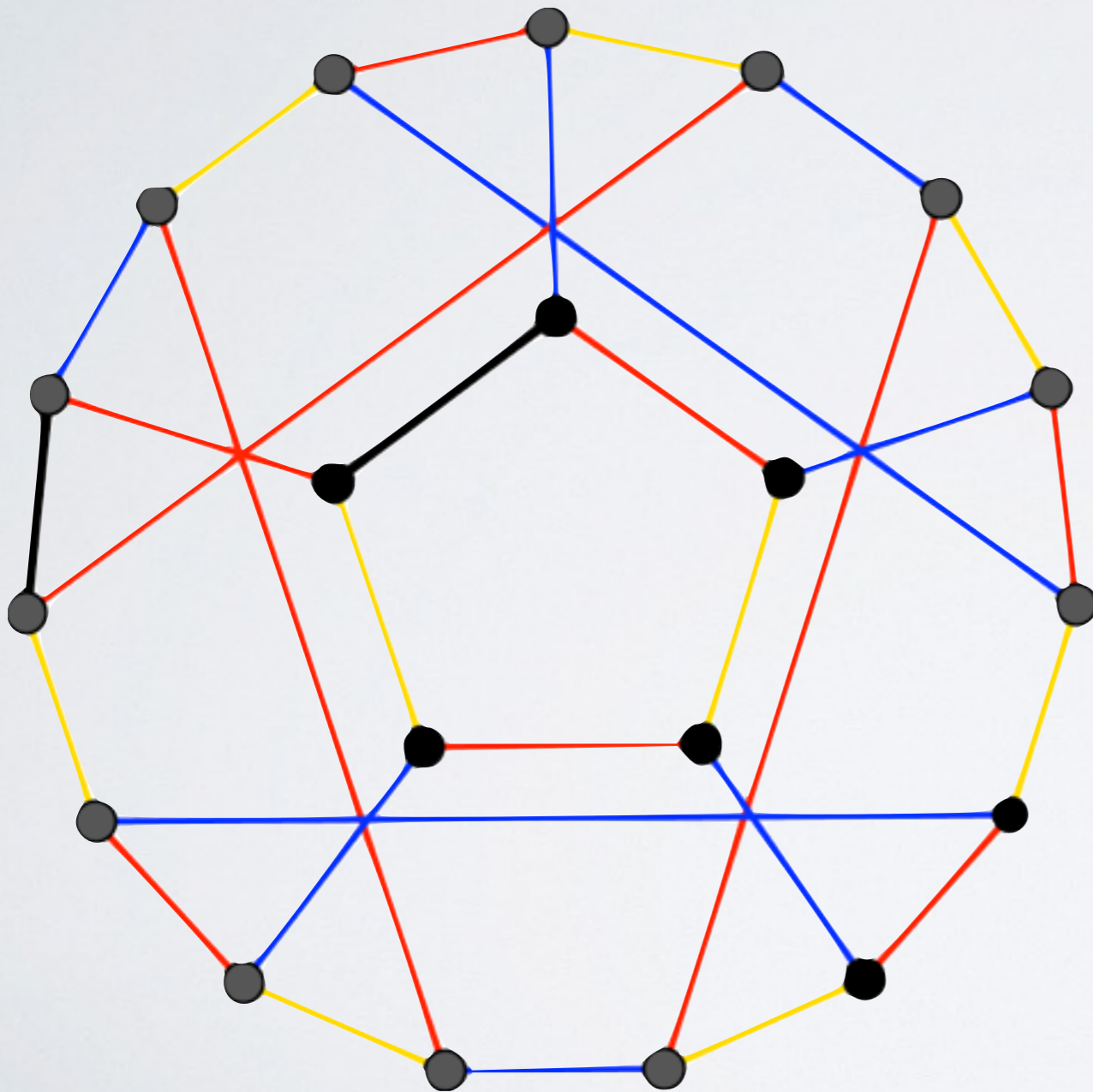
8 SNARK-Graphen

Blanusa-SNARK (Danilo Blanusa 1946)



8 SNARK-Graphen

Blumen-SNARK (nach Rufus Isaac 1975)



Isaac bewies, dass die Blumen-SNARKS eine Familie mit unendlich vielen Vertretern bilden.

Das Bild zeigt den einfachsten. Er hat 20 Knoten.