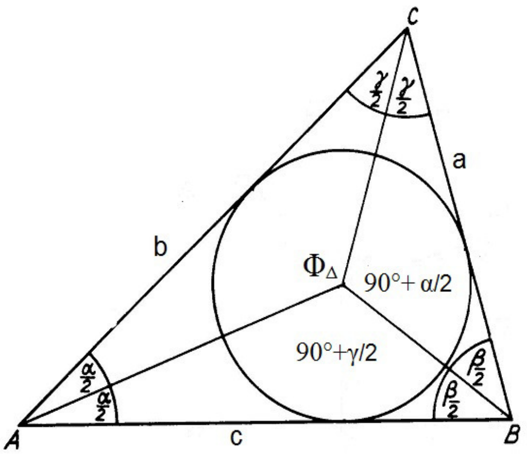
Der Satz von Morley von Gerhard Schallenkamp (23.01.2017)
- Schulkenntnisse der 8. Klasse erforderlich -

Bezeichnungen. $\angle BAC$ = Winkel (< 180°) am Punkt A im Dreieck ABC.
Φ_Δ = Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks Δ.

Zur Vorbereitung einige Eigenschaften von Φ_Δ:

> Satz. Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises, und zwar in den Winkeln $90°+\alpha/2$, $90°+\beta/2$, $90°+\gamma/2$, wobei sich diese Winkel jeweils zu der Dreieckseite öffnen, die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegt.



Beweis: Ein Punkt der Winkelhalbierenden hat gleichen Abstand zu den Schenkeln. Daher hat Φ_{ABC} gleichen Abstand zu den Seiten a, b und c. Der Winkel in $\Phi_\Delta = \Phi_{ABC}$ gegenüber Seite a beträgt $180° - \beta/2 - \gamma/2 = 180° - ½(\beta+\gamma) = 180° - ½(180° - \alpha) = 90° + \alpha/2$.

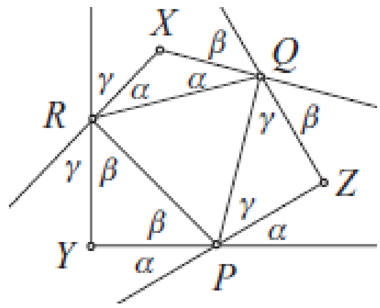
Hier wird diese Variante des Satzes wichtig:

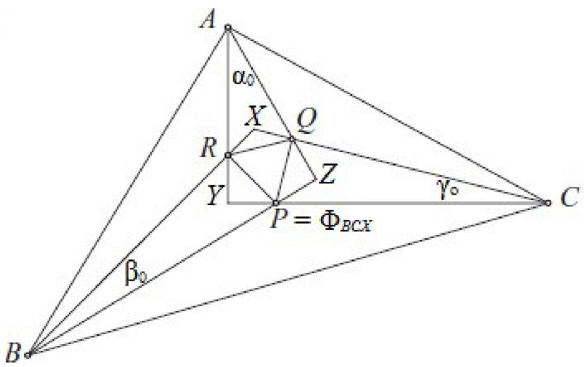
> Satz. Wenn der Punkt P innerhalb des Dreiecks ABC auf der Winkelhalbierenden durch A liegt und $\angle BPC = 90°+\alpha/2$, dann ist P eindeutig und $= \Phi_{ABC}$.

Es folgt nun der Satz von Frank Morley:

> Satz. Wenn man in einem beliebigen Dreieck ABC die **Innenwinkel drittelt**, dann bilden die Schnittpunkte der Dreiteilungsgeraden ein **gleichseitiges** Dreieck (s. Bild unten).

Beweis: Von einem gleichseitigen Dreieck PQR ausgehend, wollen wir ein Dreieck ABC mit beliebigen Winkeln $3\alpha_0$, $3\beta_0$ und $3\gamma_0$ konstruieren. Aus der Winkelsumme des Dreiecks folgt $\alpha_0+\beta_0+\gamma_0 = 60°$. Wir benötigen die Winkel $\alpha = 60°-\alpha_0$, $\beta = 60°-\beta_0$ und $\gamma = 60°-\gamma_0$, deren Winkelsumme $\alpha+\beta+\gamma = 180°-(\alpha_0+\beta_0+\gamma_0) = 120°$ wichtig ist.
Die Winkel α, β, γ werden an das Dreieck PQR wie in der Skizze rechts angelegt. Wegen $\alpha+\beta+\gamma+60° = 180°$ entstehen in den Ecken P, Q und R Geraden, die sich in den Punkten A, B und C sowie in X, Y und Z schneiden.





Die Skizzen zeigen: Der mittlere Winkel in A ($\angle RAQ$) beträgt $180°-\alpha-(\alpha+\beta+\gamma) = 60° - \alpha = \alpha_0$. Analog $\angle PBR = \beta_0$ und $\angle PCQ = \gamma_0$.

Der Winkel in X ist $\angle BXC = \xi = 180° - 2\alpha = 2\cdot(90°-\alpha)$. Der große Winkel in P ($\angle BPC$) beträgt $180°-\alpha = 90° + (90°-\alpha) = 90°+\xi/2$. Weil wegen der Symmetrie P auch auf der Winkelhalbierenden durch X liegt, ist $P = \Phi_{BCX}$.

Daraus folgt: Die Geraden BP und CP sind Winkelhalbierende im Dreieck BCX und daher $\angle PBC = \angle PBR = \beta_0$ und $\angle PCQ = \angle PCB = \gamma_0$. Analog folgen $Q = \Phi_{ACY}$ und $R = \Phi_{ABZ}$, so dass die inneren durch A, B und C laufenden Strecken die Winkel von A, B und C exakt dritteln und das Dreieck ABC die gewünschten Winkel hat.

(Idee und Teile der Skizzen aus dem Buch Claudi Alsina, Roger B. Nelsen, *Bezaubernde Beweise*, 2013, S. 116)