1 Aussagenlogik

1.1 Grundbegriffe

Def 1 **Aussage**
Eine Aussage ist ein beschriebener Sachverhalt, dem eindeutig einer der Wahrheitswerte entweder **wahr** oder **falsch** zugeordnet werden kann.

Beispiele:

(1)	$14 + 7 = 21$	wahre Aussage
(2)	Der Mond ist eine Lichtquelle	falsche Aussage
(3)	$3 - 24$	keine Aussage
(4)	$54 - x > 45$	keine Aussage
(5)	$(4x - 2)^2 + 1 > 0$	wahre Aussage

Def 2 **Aussageform**
Eine Aussageform ist ein ein beschriebener Sachverhalt, der mindestens eine Variable enthält und der bei Belegung der Variablen zu einer Aussage wird.

Bemerkungen: Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen sind meist Aussageformen.
Terme sind keine Aussagen.

1.2 Verknüpfungen von Aussagen

Def 3 **Negation von A („nicht A“)**
Als Negation $\overline{A}$ einer Aussage A bezeichnet man die Aussage, die genau dann falsch ist, wenn A wahr ist und umgekehrt.

A	$\overline{A}$
f (falsch)	w (wahr)
w	f

Eine Wahrheitswertetabelle erfasst alle Möglichkeiten der Belegung der Aussagen mit Wahrheitswerten und ist damit vollständig.

Beispiele: Peter würfelt die Zahl 3.
A := „Peter würfelt eine Primzahl“ (wahr)
$\overline{A}$ = „Peter würfelt keine Primzahl“ (falsch)

A := „Das Hauptstraßenschild enthält die Farbe rot“ (falsch)
$\overline{A}$ = „Das Hauptstraßenschild enthält die Farbe rot nicht.“ (wahr)

Bemerkungen: Sprachlich erhält man die Negation meist durch Einfügung des Wortes nicht an der entsprechenden Stelle der Aussage.

Def 4 **Konjunktion („A und B“)**

Unter der Konjunktion $A \wedge B$ zweier Aussagen A und B bezeichnet man die Verknüpfung dieser Aussagen, die dann und nur dann wahr ist wenn sowohl A als auch B wahr sind.

A	**B**	$A \wedge B$
f	f	f
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Beispiele:

A: = „Jedes konvexe Viereck hat 2 Diagonalen.“ w
B: = „Jedes konvexe Viereck hat die Innenwinkelsumme von 360°“ w
C: = „Jedes konvexe Viereck hat einen Umkreis.“ f

$A \wedge B$ ist wahr. $A \wedge C$ ist falsch. $B \wedge C$ Ist falsch.

Def 5 **Disjunktion** $A \vee B$

Unter der Disjunktion A oder B versteht man die Verknüpfung der Aussagen A und B, die dann und nur dann falsch ist, wenn sowohl A als auch B falsch sind.

A	**B**	$A \vee B$
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	w

Beispiele:

A: = „Jedes konvexe Viereck hat 2 Diagonalen.“ w
B: = „Jedes konvexe Viereck hat mindestens einen rechten Winkel“ f
C: = „Jedes konvexe Viereck hat einen Umkreis.“ f

$A \vee B$ ist wahr. $A \vee C$ ist wahr. $B \vee C$ ist falsch.

Interessant ist Folgendes:
D: = „Jedes konvexe Viereck hat mindestens einen stumpfen Winkel.“ f

$B \vee D$? := „Jedes konvexe Viereck hat mindestens einen rechten oder mindestens einen stumpfen Winkel.“ (ist wahr)

Dieser Wortlaut entspricht jedoch nicht der Aussage **B oder D**, denn bei beiden muss der Vorsatz „jedes konvexe Viereck“ enthalten sein.

$B \vee D$:= „Jedes konvexe Viereck hat mindestens einen rechten Winkel oder jedes konvexe Viereck hat mindestens einen stumpfen Winkel.“

Das ist tatsächlich falsch.

Def 6 **Alternative „entweder A oder B“**

Die Alternative zweier Aussagen A und B ist diejenige Verknüpfung der beiden Aussagen, die genau dann wahr ist, wenn genau eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

A	B	entweder A oder B
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

Beispiele:

A: = „Jedes konvexe Viereck hat 2 Diagonalen.“ w
B: = „Jedes konvexe Viereck hat mindestens einen rechten Winkel“ f
C: = „Jedes konvexe Viereck mit zwei parallelen Seiten ist ein Trapez.“ w

Entweder A oder B ist wahr.
Entweder A oder C ist falsch.

Def 7 **Implikation** $A \Rightarrow B$

Die Implikation „Wenn A, dann B“ ist die Verknüpfung der Aussagen oder Aussageformen A und B, die genau dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
f	f	w
f	w	w
w	f	f
w	w	w

Beispiele:

A: = „$x^2 = 256$“
B: = „$x = 16$“

$A \Rightarrow B$:= „Wenn $x^2 = 256$ ist, dann ist $x = 16$.“
falsch, denn $x = -16$ ist möglich, $(-16)^2 = 256$

$B \Rightarrow A$:= „Wenn $x = 16$, dann ist $x^2 = 256$.“ wahr

Def 8 **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$

Die Äquivalenz „Wenn A, genau dann B“ ist die Verknüpfung der Aussagen A und B, die genau dann wahr ist wenn beide Aussagen identische Wahrheitswerte haben.

A	**B**	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w
f	w	f
w	f	f
w	w	w

Beispiele: A: = „$x^3 = -125$“
B: = „$x = -5$“

$A \Rightarrow B$:= „Wenn $x^3 = -125$ ist, dann ist $x = -5$.“ ist wahr
$B \Rightarrow A$:= „Wenn $x = -5$, dann ist $x^3 = -125$.“ ist wahr

Also ist A **genau** dann wahr, wenn B wahr ist.
$A \Leftrightarrow B$:= „$x = -5$ genau dann, wenn $x^3 = -125$“ ist wahr

Bemerkung: Bei der Führung von Beweisen ersetzt man häufig eine Aussage durch eine zu ihr äquivalente Aussage, um sich der Behauptung zu nähern.

1.3 Logische Struktur mathematischer Sätze und Beweise

1.3.1 Logische Struktur des mathematischen Satzes

Ein einfacher mathematischer Satz hat die logische Struktur einer Implikation. Aus einer Aussage oder der Konjunktion mehrerer Aussagen, die die Voraussetzung des Satzes bilden, wird die Behauptung B impliziert.

$$V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_n \Rightarrow B$$

Wenn mindestens eine der Voraussetzungen des Satzes falsch ist, dann kann die Behauptung falsch oder wahr sein und der Satz ist in diesen Fällen zwar trotzdem wahr, aber mathematisch gesehen dann wertlos. (siehe Wahrheitswertetabelle der Implikation)

Somit bleibt es nur zu zeigen, dass die Behauptung wahr ist, wenn die Voraussetzungen wahr sind, um die Richtigkeit des Satzes zu beweisen.

Bildet man die Umkehrung eines Satzes, so vertauscht man Voraussetzung und Behauptung des ursprünglichen Satzes. Die Umkehrung ist ein neuer Satz und kann damit auch wahr oder falsch sein.

Gilt ein Satz und gleichzeitig seine Umkehrung, so liegt logisch gesehen eine Äquivalenz vor:

$$V \Rightarrow B \;\wedge\; B \Rightarrow V \quad \Leftrightarrow \quad V \Leftrightarrow B$$

Dies kann man über eine entsprechende Wahrheitswertetabelle, die alle möglichen Fälle betrachtet auch beweisen:

V	B	$V \Rightarrow B$	$B \Rightarrow V$	$V \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow V$	$V \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Da die Wahrheitswerte in den beiden letzten Spalten für alle Belegungen von B und V übereinstimmen, sind die logischen Strukturen in diesen Spalten identisch.

Wenn ein Satz und seine Umkehrung erfüllt sind, so spricht man von einem mathematischen Hauptsatz. Solche Sätze erkennt man an der Formulierung: **genau** dann, wenn

Bemerkung: Die Voraussetzung eines Satzes nennt man auch **notwendige Bedingung**.
Die Behauptung eines Satzes heißt auch **hinreichende Bedingung**.

Beispiel: Wenn eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, dann lässt ihr Quadrat bei Division durch 3 ebenfalls Rest 1.

notwendige Bedingung: x lässt bei Division durch 3 Rest 1
hinreichende Bedingung: x^2 lässt bei Division durch 3 Rest 1

Wenn eine Äquivalenz vorliegt, dann sind Voraussetzung als auch Behauptung notwendig und hinreichend.

1.3.2 direkter Beweis

Der direkte Beweis eines mathematischen Satzes besteht darin, dass man ausgehend von den Voraussetzungen des Satzes eine logische Schlusskette bildet, die bis zur Behauptung oder zu einer zur Behauptung äquivalenten Aussage führt. Dabei macht es nichts, wenn die Zwischenschritte sogar teilweise äquivalent zur Voraussetzung sind. Wenn alle Beweisschritte äquivalente Umformungsschritte sind, dann ist sogar die Umkehrung mit bewiesen. Dies muss man dann jedoch erkennbar machen.

Beispiel: Satz: Wenn eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, dann lässt ihr Quadrat bei Division durch 3 ebenfalls Rest 1.
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $x = 3n + 1$, dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ $x^2 = 3k + 1$.

Voraussetzung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x = 3n + 1$
Behauptung: Es gibt k so, dass gilt: $x^2 = 3k + 1$
Beweis:

$$
\begin{aligned}
& x = 3n + 1 \quad |\text{Quadr.} \\
\Rightarrow\ & x^2 = (3n + 1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 9n^2 + 6n + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = 3(3n^2 + 2n) + 1
\end{aligned}
$$

Setze $k = 3n^2 + 2n$, $k \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow\ x^2 = 3k + 1$$

Da das Quadrieren keine äquivalente Umformung ist, ist die Umkehrung allgemein nicht gültig.

Wenn äquivalente Aussagen benutzt werden, dann ist es auch möglich den gesamten Beweis von der Behauptung ausgehend durchzuführen (rückwärts).

1.3.3 indirekter Beweis

Beim indirekten Beweis geht man davon aus, dass die Behauptung falsch ist. Also die Annahme ist die Negation der Behauptung. In diesem Fall ist die Implikation nur dann wahr, wenn man nun auch einen Widerspruch zu den Voraussetzungen hieraus ableiten kann. (siehe Wahrheitswertetabelle) Damit ist aber dann die Annahme falsch gewesen, also ihr Gegenteil und damit die Behauptung richtig.

Beispiel: siehe Aufzeichnungen

1.3.4 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion beruht auf Eigenschaften der natürlichen Zahlen und ist damit auf Aussagen anwendbar, die im Bereich der natürlichen Zahlen gelten.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Wenn eine Aussage für eine natürliche Zahl n_0 gilt und aus ihrer Gültigkeit für eine feste aber beliebige natürliche Zahl k, $k \geqslant n_0$, ihre Gültigkeit für den Nachfolger k+1 gezeigt werden kann, dann gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen ab n_0.

$$H(n_o) \;\wedge\; k \geqslant n_0 \wedge H(k) \Rightarrow H(k+1) \quad \Rightarrow H(n), n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$$

Vergleichbar ist das Prinzip mit einer Reihe von Dominosteinen:

Der n_0-te Stein fällt um.

Die Steine sind so aufgestellt, dass, wenn der k-te Stein umfällt, auch der k+1-te Stein umfällt.

Also fallen alle Steine ab dem n_0-ten Stein um.

Daraus ergibt sich der **prinzipielle Aufbau des Induktionsbeweises**:

Induktionsanfang:	Nachweis der Gültigkeit der Aussage für die Startzahl n_0	
Induktionsschritt:	Voraussetzung:	Formulierung der Aussage für k
	Behauptung:	Formulierung der Aussage für k+1
	Beweis:	direkter Beweis: aus H(k) folgt H(k+1)

Beispiel: siehe Aufzeichnungen