Analytische Geometrie

Unterrichtsinhalte und Beispiele

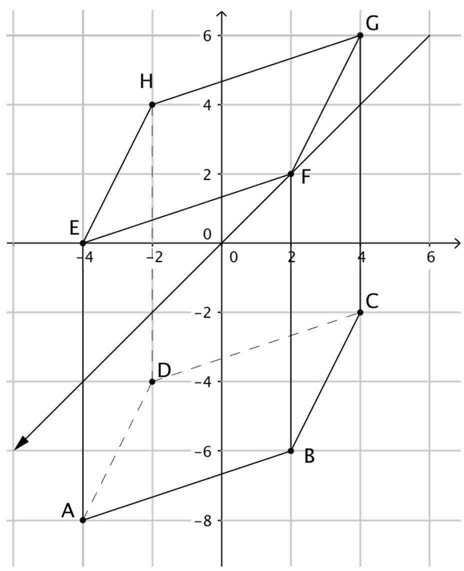
Olaf Schimmel

1 Berechnungen an Flächen und Körpern

Beispiel 1 Berechnungen an einem Prisma.

Gegeben ist im Raum ein gerades vierseitiges Prisma ABCDEFGH mit der Höhe h = 8 LE durch die Punkte der Grundfläche A(6; 2; -2); B(4; 6; -2), C(0; 4; -2) und D(2; 0; -2).

Skizzieren Sie das Prisma und bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der Deckfläche.



E(6; 2; 6); F(4; 6; 6); G(0; 4; 6); H(2; 0; 6)

Untersuchen Sie ob das Viereck ABCD besondere Eigenschaften hat.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC} \quad \wedge \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$$

Das Viereck ABCD ist ein Rhombus.

Es ist $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle BAD = 90^\circ$
Das Viereck ABCD ist sogar ein Quadrat.

Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas.

$$V = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| = 20 \cdot 8 = 160 \text{ VE}$$

$$A_O = 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| + 4 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 8 = (40 + 64 \cdot \sqrt{5}) \text{ FE}$$

Ein Punkt R teilt die Kante $\overline{AE}$ im Verhältnis 3:5. Bestimmen Sie R und berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle BRG$.

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos \sphericalangle BRG = \frac{\overrightarrow{RB} \circ \overrightarrow{RG}}{|\overrightarrow{RB}| \cdot |\overrightarrow{RG}|} = -\frac{5}{\sqrt{29 \cdot 65}}$$

$$\sphericalangle BRG = 96,61^\circ$$

Die Koordinatenebenen teilen das Prisma in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem die x-y-Ebene das Prisma zerlegt.

Da die Grundfläche ABCD parallel zur x-y-Ebene liegt, ist das teilungsverhältnis gleich dem, in dem die Höhe geteilt wird.
Anhand den Koordinaten der Punkte A und E erhält man: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{6}$
Das gesuchte Teilungsverhältnis beträgt 1:3.

Durch einen ebenen geraden Schnitt kann man das Prisma so in zwei Teilkörper zerlegen, dass zwei dreiseitige Prismen entstehen ohne dass neue Eckpunkte hinzukommen. Beschreiben Sie einen solchen Schnitt und ermitteln Sie um wie viel Prozent dabei der Oberflächeninhalt der beiden Teilkörper insgesamt zunimmt.

Der Schnitt erfolgt diagonal durch den Körper. Es gibt sechs Möglichkeiten: Schnittflächen sind dann ACGE, BDHF, ABGH, BCHE, CDEF oder DAFG.
Die Inhalte sind: $A = 16\sqrt{10}$ für die ersten beiden und $A = 4\sqrt{105}$ für die anderen.

Beispiel 2 Berechnungen an einem Pyramidenstumpf

Gegeben ist ein gerader Pyramidenstumpf ABCDEFGH durch die Punkte A(5; 0; 0) B(0; 5; 0), C(-5; 0; 0), D(0; -5; 0) und E(3; 0; 4).

Zeigen Sie, dass die Punkte ABCD Eckpunkte eines Quadrates sind. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Quadrates ABCD.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0 \quad \wedge \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = 5\sqrt{2}$$

Damit ist das Quadrat ABCD nachgewiesen. Der Flächeninhalt beträgt: A = 50 FE.

Geben Sie die Koordinaten der Punkte F, G und H an.

Die z-Koordinate wächst um 4 und die anderen Koordinaten werden von 5 auf 3 bzw. -3 reduziert.
Wir erhalten: F(0; 3; 4), G(-3; 0; 4) und H(0; -3; 4).

Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen des Pyramidenstumpfes.

$$A_O = A_G + A_D + 4 \cdot A_S$$

$$A_G = 50 \text{ FE};\ A_D = 18 \text{ FE};\ A_S = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AF}| + |\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{AE}|\right) = 24 \text{ FE}$$

$$A_O = (50 + 18 + 96) = 164 \text{ FE}$$

Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche.

Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ und $\overline{DC}$ sind R(2,5; 2,5; 0); S(1,5; 1,5; 4) und T(-2,5; -2,5; 0). Wir berechnen den Winkel $\sphericalangle TRS$.

$$\cos \sphericalangle TRS = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \sphericalangle TRS = 70.53^\circ$$

Alle anderen Seitenflächen haben denselben Neigungswinkel.

2 Gleichungen für Geraden und Strecken

2.1 Geradengleichungen in Parameterform

Def 2.1

Sei $P \in g$ und $\vec{a} \parallel g$. Dann heißt jede Gleichung der Form:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung der Geraden g mit dem Parameter t. $\overrightarrow{OP}$ heißt Stützvektor und $\vec{a}$ heißt Richtungsvektor von g.

Bemerkungen:

1. Für jede Belegung des Parameters t erhält man den Ortsvektor zu genau einem Punkt der Geraden und zu jedem Punkt auf g existiert genau ein Parameterwert t.

2. Sind zwei Punkte von g bekannt, so kann man aus ihnen eine Parametergleichung aufstellen. Man erhält aus A und B die Gleichung:

   $$g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

   Gilt in dieser Gleichung: $0 \leqslant t \leqslant 1$, so erhält man die Punkte der Strecke $\overline{AB}$.

3. Für dieselbe Gerade sind unendlich viele unterschiedliche Parametergleichungen möglich, denn jeder Punkt auf g kann als Stützvektor verwendet werden und jeder Vektor, der zu g parallel liegt, kann als Richtungsvektor dienen.

4. Jede Parametergleichung einer Geraden ist eine n-dimensionale Vektorgleichung und kann in n lineare Gleichungen mit der Variablen t zerlegt werden.

Beispiel 1 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte P(3; 1; -1) und Q(8; 2; -4) auf.

Stützvektor: $\overrightarrow{OP}$; Richtungsvektor: $\overrightarrow{PQ}$

$$g: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2 Prüfen Sie, ob die Punkte A(3; 2; -4) und B(2; 0; 1) auf

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad t = 2 \quad \Rightarrow \quad A \in g$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad n.l. \quad \Rightarrow \quad B \notin g$$

Beispiel 3 Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert a der Punkt A(a; 2a+1) auf

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1-2t \quad \wedge \quad 2a+1 = -3t+2$$

$t = 1 \quad \wedge \quad a = -1 \qquad \Rightarrow \qquad$ A(-1; -1) liegt auf g.

Beispiel 4 Zeigen Sie, dass der Punkt P(3; 8; 5) auf der Strecke $\overline{AB}$ mit A(-2; -2; 10) und B(5; 12; 3) liegt. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem er die Strecke teilt.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant t = \frac{5}{7} \leqslant 1 \qquad \Rightarrow \qquad P \in \overline{AB}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{7} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AP} \;:\; \overline{PB} = 5 \;:\; 2$$

Beispiel 5 Bestimmen Sie den Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ mit A(3; 0; 1) und B(5; 5; -4), der diese im Verhältnis 3:7 teilt.

Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

TV = 3:7 $\quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{10} \quad \Rightarrow \quad T(3,6; 1,5; -0,5)$

2.2 Parameterfreie Geradengleichungen

In der Ebene kann man Geraden auch durch eine einzige Gleichung parameterfrei beschreiben. In der Gleichung tauchen dann nur die Koordinaten x und y auf.

Def 2.2

In der Ebene heißt die Gleichung der Form:

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

Geradengleichung in allgemeiner Form. Dabei dürfen a und b nicht beide den Wert 0 annehmen.

Bemerkungen:

1. Für $a = 0$ und $b \neq 0$ erhält man nach Umstellen: $y = \frac{c}{b}$, also eine Parallele zur x-Achse.
2. Für $a \neq 0$ und $b = 0$ erhält man nach Umstellen: $x = \frac{c}{a}$, also eine Parallele zur y-Achse.
3. Für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ erhält man durch Umstellen nach y: $y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b}$ die Gleichung einer linearen Funktion mit dem Anstieg $m = -\frac{a}{b}$ und dem Achsenabschnitt $n = \frac{c}{b}$.

Beispiel 6 Stellen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A(3; -1) und B(5; 2) in Parameterform und in parameterfreier Form auf.

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$

parameterfreie Form:
$x = 3 + 2t$ nach x: $\quad t = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Ergebnis in y: $\quad y = -1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2} \cdot x - \frac{11}{2}$

Beispiel 7 Geben Sie für die Gerade g: y = -2x + 7 eine Parametergleichung an.

Lösung: Berechnung zweier Punkte, daraus die Geradengleichung

$P_1(0;7); P_2(1;5) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3 Lage von Geraden

3.1 Rechnerische Untersuchungen in der Ebene

In der Ebene kann man die gegenseitige Lage zweier Geraden eindeutig anhand der Anzahl der Schnittpunkte schließen. Um die Anzahl der Schnittpunkte zu ermitteln, kann man die Geradengleichungen gleichsetzen und erhält ein Gleichungssystem. Dabei können folgende Fälle auftreten:

1. Hat das Gleichungssystem **keine Lösung**, dann sind die Geraden parallel und verschieden.
2. Gibt es **genau eine Lösung**, so schneiden sich beide Geraden in genau einem Punkt.
3. Hat das Gleichungssystem **unendlich viele Lösungen**, so beschreiben beide Gleichungen dieselbe Gerade, bzw. die Geraden sind identisch.

Beispiel 1 Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3 + t &= 2 - 2u \quad \wedge \quad -1 - 2t = u \\ 3 + t &= 2 - 2(-1 - 2t) \\ 3t &= -1 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{3} \quad u = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Geraden g und h schneiden sich in einem Punkt: $S\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Bemerkung:
Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen eines der errechneten Parameterwerte in die zugehörige Geradengleichung.

Beispiel 2 Untersuchen Sie die Lage der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $2x - 3y = 6$

Aus der Geradengleichung von g ergibt sich: $x = 3 + t$ und $y = -1 - 2t$

Setzen wir dies in die Gleichung für h ein, erhalten wir:

$2(3 + t) - 3(-1 - 2t) = 6 \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{3}{8}$

Die Geraden schneiden sich in einem Punkt $S\left(\frac{21}{8}; -\frac{1}{4}\right)$

Beispiel 3 Gegeben ist eine Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ a-4 \end{pmatrix} \quad t; a \in \mathbb{R}$

und eine Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R}$.

Untersuchen Sie die Lage in Abhängigkeit vom Parameter a.

Die Geraden liegen parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind, also wenn gilt:

$\begin{pmatrix} a \\ a-4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 1 \wedge a = 3$

Für a = 3 folgt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ n.l. und damit $g_1 \parallel h$.

Für $a \neq 3$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 + t \cdot a \\ 4 + t \cdot (a-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3u \\ 6 - u \end{pmatrix}$

Lösung des Gleichungssystems führt auf:

$t = \frac{7}{4a - 12} \quad \wedge \quad u = \frac{a+4}{4a-12}$

g_a und h schneiden sich im Punkt: $S_a\left(\frac{11a - 20}{4a - 12}; \frac{23a - 76}{4a - 12}\right)$

3.2 Lagemöglichkeiten und ihre Untersuchung im Raum

Die folgende Tabelle zeigt die Lagemöglichkeiten zweier Geraden im Raum und zugehörige rechnerische Merkmale:

Lagebeschreibung	Schnittgebilde	Richtungsvektoren
g und h schneiden sich in einem Punkt S.	$g \cap h = \{S\}$ Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung für jeden Parameter.	$\vec{g} \nparallel \vec{h}$
g und h sind parallel und verschieden.	$g \cap h = \emptyset$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung.	$\vec{g} \parallel \vec{h}$
g und h sind identisch.	$g \cap h = g = h$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.	$\vec{g} \parallel \vec{h}$
g und h liegen windschief.	$g \cap h = \emptyset$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung.	$\vec{g} \nparallel \vec{h}$

Um also die Lage vollständig zu untersuchen reicht es nicht aus, das Gleichungssystem zu lösen. Es empfiehlt sich folgende

Vorgehensweise:

1. Untersuche, wie viele Lösungen das Gleichungssystem aus $g \cap h$ besitzt.
   Fall 1: unendliche viele Lösungen $\Rightarrow$ $g = h$
   Fall 2: genau eine Lösung $\Rightarrow$ $g \cap h = S$ (S aus Parametern berechnen.)
   Fall 3: keine Lösung: $\Rightarrow$ weiter mit 2.
2. Untersuche die Richtungsvektoren auf Parallelität.
   Fall 3.1: $\vec{g} \parallel \vec{h}$ $\Rightarrow$ $g \parallel h$
   Falls 3.2: $\vec{g} \nparallel \vec{h}$ $\Rightarrow$ g windschief zu h.

Die Richtungsvektoren müssen nur dann untersucht werden, wenn das Gleichungssystem keine Lösungen besitzt.

Beispiel 4 Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchung des Gleichungssystems $g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2r + s &= 1 \\ -r + 2s &= 2 \\ 2r + s &= 4 \end{aligned}$$

$$1 = 4 \quad \Rightarrow \quad L = \emptyset$$

Lage noch nicht eindeutig bestimmt. Die Geraden können windschief oder parallel zueinander liegen.

Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -2 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \\ \lambda &= -2 \end{aligned}$$

λ ist nicht eindeutig bestimmt. (Widerspruch)

$\vec{g} \nparallel \vec{h} \quad \Rightarrow$ g und h liegen windschief.

Bemerkung:
Untersucht man zuerst die Richtungsvektorem auf Parallelität, so muss man in jedem Falle das Gleichungssystem noch Lösen. Daher ist es besser, zuerst dieses zu lösen.

Beispiel 5 Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Untersuchung des Gleichungssystems $g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r + 2s &= -4 \\ -r - 2s &= 4 \\ 2r + 4s &= -8 \\ r &= -2s - 4 \\ \Rightarrow \quad L &= \{(r; s) : r = -2s - 4 \wedge s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Die Geraden sind identisch.

Beispiel 6 Untersuchen Sie die Lage der Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchung des Gleichungssystems $g \cap h$:

$$\begin{aligned} r + s &= -2 \\ 2r + s &= 1 \\ r - s &= 8 \end{aligned}$$

$$r = 3 \wedge s = -5$$

Die Geraden schneiden sich in einem Punkt S.

Wir erhalten: $S(0; 10; 1)$

Beispiel 7 Untersuchen Sie die Lage der Geradenschar

g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ a+1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und der Geraden

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Untersuchung des Gleichungssystems $g_a \cap h$:

$$\begin{aligned} a - r + s &= 2 \\ r &= 2 \\ a + 3r - s &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + s &= 4 \\ a - s &= -6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a = -1 \wedge s = 5$$

Für a = -1 schneiden sich die Geraden im Punkt $S(-3; 1; 6)$.

Für $a \neq -1$ hat das System keine Lösung.

Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ \lambda &= n.d. \\ \lambda &= 3 \end{aligned}$$

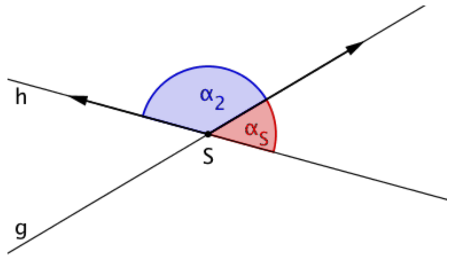
λ ist nicht bestimmt. (Widerspruch)

$\vec{g_a} \nparallel \vec{h} \quad \Rightarrow \quad g_a$ und h liegen für $a \neq -1$ windschief.

3.3 Schnittwinkel zwischen zwei Geraden

Wenn sich zwei Geraden in genau einem Punkt S schneiden, so kann man zwischen ihnen einen Schnittwinkel definieren.

Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ist stets der maximal rechte Winkel zwischen ihnen.
Berechnet man den Winkel zwischen den Richtungsvektoren könnte man jedoch auch den stumpfen Winkel erhalten.



Ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren bereits sowieso der spitze Winkel, erhält man direkt den Winkel α_S. Ist der Winkel dagegen stumpf, gilt offensichtlich die Beziehung $\alpha_S = 180° - \alpha_2$. Aufgrund der Eigenschaften der Kosinusfunktion gilt dann aber $\cos\alpha_S = -\cos\alpha_2$. Da nun aber für stumpfe Winkel das Skalarprodukt der Richtungsvektoren negativ ist, folgt für den Schnittwinkel in diesem Fall, dass man den entgegengesetzten Wert erhält, also den Betrag des Skalarproduktes.
Zusammengefasst erhält man:

Satz 3.1

Gegeben seien die Geraden g und h mit den Richtungsvektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$. Wenn sich die Geraden in einem Punkt schneiden, gilt für den Schnittwinkel:

$$\cos \sphericalangle(g,h) = \frac{|\vec{g} \circ \vec{h}|}{|\vec{g}| \cdot |\vec{h}|}$$

Beispiel 8 Begründen Sie, dass sich die Geraden

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und h: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in einem Punkt schneiden und berechnen Sie den Schnittwinkel.

Für r = 1 erhält man den Stützvektor von h. $\vec{g} \nparallel \vec{h}$, also gilt: S(0; 2; 1).

$$\cos\alpha_S = \frac{|-1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} \approx 0,5455$$

$$\alpha_S = 56,94°$$

4 Ebenen und ihre Beschreibung

4.1 Parametergleichungen einer Ebene

Eine Ebene ist durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen eindeutig bestimmt. In ähnlicher Weise wie bei einer Geraden kann man daraus eine Parametergleichung aufstellen, mit der jeder Punkt auf der Ebene beschrieben werden kann.

Def 4.1

Sei E eine Ebene mit den drei nichtkollinear liegenden Punkten A, B und C. Dann heißt jede Gleichung der Form:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AC} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

Parametergleichung *der Ebene E mit den Parametern u und v.*
$\overrightarrow{OA}$ heißt Stützvektor. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ heißen Spannvektoren von E.

Bemerkungen:

1. Für jede Belegung beider Parameter u und v erhält man den Ortsvektor zu genau einem Punkt der Ebene und zu jedem Punkt auf E existiert genau ein geordnetes Paar zugehöriger Parameterwerte u und v.
2. Für dieselbe Ebene sind unendlich viele unterschiedliche Parametergleichungen möglich, denn jeder Punkt auf E kann als Stützvektor dienen und beliebige nichtparallele Vektoren, die auf E liegen, können als Spannvektoren verwendet werden.
3. Jede Parametergleichung einer Ebene ist eine n-dimensionale Vektorgleichung und kann in n lineare Gleichungen mit den Variablen u und v zerlegt werden.

Beispiel 1 Stellen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte P(3; 1; -1); Q(6; 3; 4) und R(0; 2; 1) auf.

Stützvektor: $\overrightarrow{OP}$; Spannvektoren: $\overrightarrow{PQ}$; $\overrightarrow{PR}$

$$E: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2 Gegeben ist die Ebene E durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

Untersuchen Sie, ob die Punkte P(4; 4; 2) bzw. Q(-6; 2; 6) zu E gehören. Für welchen Parameterwert r liegt R(r; 4; r) auf E?

Wir setzen die Punkte in die Ebenengleichung ein und lösen das Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \quad u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u - 2v &= 2 \\ 2u + v &= 1 \\ u + 3v &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1);(3) \quad \Rightarrow \quad u &= \frac{12}{5} \quad \wedge \quad v = \frac{1}{5} \\ \text{Probe mit (2):} \quad 5 &= 1 \quad \text{falsche Aussage} \\ \Rightarrow \quad P &\notin E \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \quad u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u - 2v &= -8 \\ 2u + v &= -1 \\ u + 3v &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1);(3) \quad \Rightarrow \quad u &= -2 \quad \wedge \quad v = 3 \\ \text{Probe mit (2):} \quad -1 &= -1 \quad \text{wahre Aussage} \\ \Rightarrow \quad Q &\in E \end{aligned}$$

Es entstehen Gleichungssysteme aus drei Gleichungen mit nur zwei Variablen. Man löst das System aus zwei Gleichungen und führt mit der dritten die Probe aus.

$$\begin{pmatrix} r \\ 4 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \quad u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r - u + 2v &= \quad 2 \\ 2u + v &= \quad 1 \\ r - u - 3v &= \quad -1 \end{aligned}$$

$$(1) - (3) : \Rightarrow \quad v = \frac{3}{5} \ \wedge \ u = \frac{1}{5} \wedge \ r = 1$$

Für r = 1 liegt der Punkt R(1; 4; 1) in der Ebene E.

Bemerkung:
Mit Hilfe von Parametergleichungen kann man auch prüfen, ob ein Punkt P zu einem Dreieck ABD oder zu einem Parallelogramm ABCD gehört. Zunächst stellt man die Ebenengleichung in der Form:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + u \cdot \overrightarrow{AB} + v \cdot \overrightarrow{AD} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

auf. Dann gelten folgende Bedingungen:

1. P gehört zum Dreieck ABC genau dann, wenn gilt:

$$u \geqslant 0 \wedge v \geqslant 0 \wedge u + v \leqslant 1$$

2. P liegt im Parallelogramm ABCD, wenn gilt:

$$0 \leqslant u \leqslant 1 \ \wedge \ 0 \leqslant v \leqslant 1$$

Beispiel 3 Untersuchen Sie, ob der Punkt P(4; 3; 6) zum Dreieck ABC mit A(0; -2; 1); B(8; 10; 5); C(4; 2; 9) gehört.

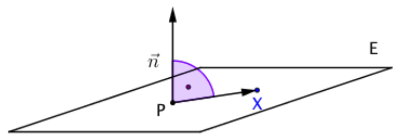
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \quad u \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2u + v &= \quad 1 \\ 12u + 4v &= \quad 5 \\ 4u + 8v &= \quad 5 \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{4} \ \wedge \ v = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad u + v < 1 \ \Rightarrow \ P \in \Delta ABC$$

4.2 Punkt-Normalenform der Ebenengleichung

Eine Ebene ist durch einen Punkt P, der zur Ebene gehört und einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene eindeutig bestimmt. Für jeden Punkt X, der ebenfalls zur Ebene gehört ist dann das Skalarprodut aus den Vektoren $\overrightarrow{PX}$ und $\vec{n}$ stets gleich Null.



Verfolgen wir diesen Gedanken weiter, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX} \circ \vec{n} &= 0 \\
\left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) \circ n &= 0 \\
\overrightarrow{OX} \circ \vec{n} &= \overrightarrow{OP} \circ \vec{n}
\end{aligned}$$

Def 4.2

Sei P ein Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor zur Ebene E. Dann heißt die Gleichung der Form:

$$\vec{x} \circ \vec{n} = \overrightarrow{OP} \circ \vec{n}$$

Punkt-Normalengleichung *der Ebene E.*

Beispiel 4 Stellen Sie die Punkt-Normalengleichung der Ebene E durch A(2; 1; 0), B(1; 3; 2) und C(0; 3; 1) auf und prüfen Sie, ob Q(2; 1; 6) zu E gehört.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad \vec{x} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$5 = -7 \quad \text{falsche Aussage} \quad Q \notin E$$

4.3 Koordinatengleichung einer Ebene

Wir bezeichnen den Normalenvektor $\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und das Produkt $\overrightarrow{OP} \circ \vec{n} := d$.

Setzen wir das in die Punkt-Normalengleichung ein, so ergibt sich:

$$\vec{x} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$$

$$ax + by + cz = d$$

Def 4.3

Eine Ebene im Raum kann durch eine Gleichung der Form

$$ax + by + cz = d \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden. Dabei dürfen a,b,c nicht alle gleich 0 sein. Eine Gleichung dieser Form heißt ***Koordinatengleichung*** *der Ebene E.*

Bemerkungen:

1. Eine Punktprobe geschieht durch Einsetzen der Punktkoordinaten in die Gleichung. und wird dadurch sehr einfach.
2. Wenn d = 0 ist, gehört der Ursprung zur Ebene E und umgekehrt. (Nachweis durch Punktprobe)
3. Die Gleichungen der Koordinatenebenen heißen:
   y-z-Ebene: x = 0; x-z-Ebene: y = 0 und x-y-Ebene: z = 0.
4. Wenn genau zwei der Parameter a, b, c den Wert 0 annehmen erhält man eine Parallelebene zu einer der Koordinatenebenen.
5. Wenn genau einer der Parameter den Wert 0 annimmt, erhält man eine Parallelebene zu einer der Koordinatenachsen.
6. Die Koordinatengleichung einer Ebene ist die wichtigste Gleichung. Viele Untersuchungen an Ebenen können mit Hilfe dieser Gleichung am effektivsten durchgeführt werden.

Beispiel 5 Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch A(1; 1; 0), B(1; 4; 1) und C(2; 2; 3) auf und prüfen Sie, ob Q(2; 1; 6) zu E gehört.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$d = \overrightarrow{OA} \circ \vec{n} = 9$$

$$E: \quad 8x + y - 3z = 9$$

Beispiel 6 Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden: $\vec{n}_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$d = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \vec{n}_* = 13$$

$$E: \quad x + 3y = 13$$

Die Ebene weißt in der Gleichung keine z-Koordinate auf. Diese ist also stets frei wählbar. Folglich liegt E parallel zur z-Achse.
Die x-Achse schneidet sie im Punkt $S_x = (13; 0; 0)$.
Die y-Achse schneidet sie im Punkt: $S_y = \left(0; \frac{13}{3}; 0\right)$.

Bemerkung:
Man kann den Normalenvektor beliebig „kürzen“, um auf diese Weise Vektoren mit kleineren ganzzahligen Koordinaten zu erhalten.

Beispiel 7 Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene E auf: $2x - 3y + 5z = 18$

Wir ermitteln einfach drei Punkte und stellen aus diesen eine Parametergleichung auf. Als Punkte könnte man jeweils die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen verwenden.

x-Achse: $y = 0 \ \wedge z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 9 \quad \Rightarrow \quad S_x(9; 0; 0)$

y-Achse: $x = 0 \ \wedge z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -6 \quad \Rightarrow \quad S_y(0; -6; 0)$

z-Achse: $x = 0 \ \wedge y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{18}{5} \quad \Rightarrow \quad S_z\left(0; 0; \frac{18}{5}\right)$

Daraus ergibt sich dann folgende Parametergleichung:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Beispiel 8 Eine Ebenenschar E_t geht durch die Punkt $A_t(t; t-1; 0)$, B(2; 3; 1) und C(1 ; -1; 2). Stellen Sie eine Koordinatengleichung auf.

Wir benutzen zur Bestimmung des Normalenvektors die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-t \\ t-3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4-t \\ t-3 \\ -2 \end{pmatrix} = -2t + 3$$

$$E: \quad (4-t)x + (t-3)y - 2z = -2t + 3$$

Für $t = \frac{3}{2}$ geht die Ebene durch den Ursprung.

Für t = 4 ist sie parallel zur x-Achse.

Für t = 3 liegt sie parallel zur y-Achse.

4.4 Achsenabschnittsgleichung

Gegeben sei eine Ebenengleichung in Koordinatenform mit $d \neq 0$:

$$ax + by + cz = d$$

Dividiert man diese Gleichung durch d, so ergibt sich:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z = 1$$

Nun ersetzen wir (falls diese existieren): $r = \frac{d}{a}$, $s = \frac{d}{b}$ und $t = \frac{d}{c}$. So ergibt sich:

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1$$

Def 4.4

Gegeben seien reelle Zahlen r, s und t. Dann heißt eine Ebenengleichung der Form

$$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} + \frac{z}{t} = 1$$

Achsenabschnittsgleichung *der Ebene E. Ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind dann:* $S_x(r; 0; 0)$*,* $S_y(0; s; 0)$ *und* $S_z(0; 0; t)$*.*

Beispiel 8 Eine Ebene schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A(2; 0; 0); B(0; 3; 0) und C(0; 0; 9). Stellen Sie die Achsenabschnittsgleichung und eine Koordinatengleichung auf.

Achsenabschnittsgleichung:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1$$

Wir multiplizieren mit dem Hauptnenner 36 und erhalten die Koordinatengleichung:

$$18x + 12y + 4z = 36$$

Beispiel 9 Eine Ebene ist durch $4x - 6y = -12$ gegeben. Stellen Sie die Achsenabschnittsform auf und geben Sie die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen an.

$r = -3$, $s = 2$, t existiert nicht, da c = 0. Also ergibt sich:

$$-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Die Achsenschnittpunkte sind: $S_x(-3; 0; 0)$ und $S_y(0; 2; 0)$.

4.5 Hessesche Normalengleichung

Die folgende Ebenengleichung ist zur Berechnung von Abständen hilfreich. Dazu ist es wichtig, dass man den Normalenvektor auf die Länge 1 „normiert“. Dies geschieht, indem man durch seinen Betrag dividiert.

Aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ folgt: $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Wir gehen von der Koordinatengleichung aus und bringen zunächst d auf die andere Seite:

$$ax + by + cz - d = 0$$

Nun dividieren wir durch $|\vec{n}|$ und erhalten:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

Diese Form der Ebenengleichung nennen wir **Hessesche Normalengleichung**.

Bemerkung:
Wenn man Punkte dort einsetzt, die nicht zur Ebene E gehören, so erhält man ihren Abstand zur Ebene. Für den Abstand des Ursprunges O von der Ebene E gilt:

$$a(O, E) = \left| \frac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Beispiel 9 Stellen Sie die Ebene E $2x - 3y + 5z = 18$ in der Hesseschen Normalenform auf und bestimmen Sie ihre Entfernung vom Koordinatenursprung.

Es gilt $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$. Also ist die HNF:

$$\frac{2x - 3y + 5z - 18}{\sqrt{38}} = 0$$

Ihr Abstand vom Ursprung beträgt: $a(O, E) = \frac{18}{\sqrt{38}} = \frac{9}{19} \cdot \sqrt{38}$

5 Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

5.1 Gerade - Ebene

Die folgende Tabelle zeigt die Lagemöglichkeiten einer Gerade und einer Ebene im Raum und zugehörige rechnerische Merkmale:

Lagebeschreibung	Schnittgebilde	Vektoren
g und E schneiden sich in einem Durchstoßpunkt S.	$g \cap E = \{S\}$ Das Gleichungssystem bzw. die Gleichung hat genau eine Lösung.	$\vec{g} \not\perp \vec{n}_E$
g und E schneiden sich nicht. $g \parallel E$	$g \cap E = \emptyset$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung.	$\vec{g} \perp \vec{n}_E$
g liegt in E.	$g \cap E = g$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.	$\vec{g} \perp \vec{n}_E$

Allein das Gleichungssystem reicht bereits aus, um die Lage eindeutig zu ermitteln. Damit erhalten wir folgende

Alternativen:

1. Setze die Parametergleichungen für g und E gleich und löse das Gleichungssystem: $g \cap E$.
   Fall 1: unendliche viele Lösungen $\Rightarrow$ g liegt in E
   Fall 2: genau eine Lösung $\Rightarrow$ $g \cap E = \{S\}$ (S aus Parametern berechnen.)
   Fall 3: keine Lösung: $\Rightarrow$ $g \parallel E$

2. Setze g koordinatenweise in die Koordinatengleichung für E ein.
   Fall 1: wahre Aussage: $\Rightarrow$ g liegt in E
   Fall 2: genau eine Lösung: $\Rightarrow$ $g \cap E = \{S\}$ (S aus Parameter berechnen.)
   Fall 3: falsche Aussage: $\Rightarrow$ $g \parallel E$.

Beispiel 1 Untersuchen Sie die Lage der Geraden g(A,B) mit A(2; 1; 5) und B(3; 3; 1) bezüglich der Ebene E: 4x -3y +z = 23.

Wir stellen g auf: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Einsetzen in E:

$$4(2 + r) - 3(1 + 2r) + (5 - 4r) = 28$$

Wir erhalten $r = -3$ und damit S(-1; -5; 17).

Beispiel 2 Ermitteln Sie, wie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ zur Ebene durch die Punkte A(2;1; 0), B(4; 2; 1) und C(3; 3; 5) liegt. Prüfen Sie, ob die Gerade durch die Dreiecksfläche ABC geht.

Ebenengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ansatz $g \cap E$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} r + 2u + v &= -1 \\ -3r + u + 2v &= 1 \\ 2r + u + 5v &= -2 \end{aligned}$$

Lösung: $r = -\frac{1}{2},\ u = -\frac{1}{6},\ v = -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$

S liegt nicht im Dreiecks ABC da u < 0 und v < 0.

Bemerkung:
Wenn ausschließlich nach der Lage von g und E gefragt ist, empfiehlt es sich, die Koordinatengleichung der Ebene zu verwenden. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn Scharen zu untersuchen sind.

Beispiel 3 Gegeben ist die Ebene E: $4x - 2y + 3z = 12$ und die Geradenschar g_a: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ a+3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage in Abhängigkeit von a.

Einsetzen von g_a in E:

$$4(3 + ar) - 2(-2 + r(a + 3)) + 3(-1 + r) = 12$$

$$(2a - 3)r = -1$$

$a = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad$ keine Lösung, also: $\quad g \parallel E$

$a \neq \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{2a-3} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{5a-9}{2a-3}; \frac{3a+3}{2a-3}; \frac{-2a+2}{2a-3}\right)$

Beispiel 4 Untersuchen Sie die Lage der Ebenenschar $E_a: \quad 2ax - (a+2)y + z = 4$ zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Untersuchen Sie, ob es eine Ebene E_a gibt, für die der Schnittpunkt mit g in der x-y-Ebene liegt.

Ansatz: $2a(1 + 2r) - a(-1 + 4r) + (-3 - r) = 4$

Wir erhalten: $r = 3a - 7$

Die Gerade g schneidet jede Ebene der Schar in genau einem Punkt:

$S(6a - 13; 12a - 29; -3a + 4)$.

Ansatz: $z_S = -3a + 4 = 0$

Für $a = \frac{4}{3}$ liegt S in der x-y-Ebene.

Der Schnittpunkt ist dann $S(-5; -13; 0)$.

5.2 Ebene - Ebene

Für zwei Ebenen im Raum kann man sich folgende Lagemöglichkeiten vorstellen.

Lagebeschreibung	Schnittgebilde	Normalenvektoren
E_1 und E_2 schneiden sich in einer Schnittgeraden g_S.	$E_1 \cap E_2 = g_s$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist eindimensional.	$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$
E_1 und E_2 liegen parallel	$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung.	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
E_1 und E_2 sind identisch.	$E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist zweidimensional.	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

Würde man beide Parametergleichungen der Ebenen gleichsetzen, entstünde ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit vier Variablen. Verwendet man dagegen beide Ebenen in Koordinatenform, so entsteht ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Variablen. Daher ergibt sich im Allgemeinen als die günstigste Variante zur Lösung eines Schnittproblems zwischen zwei Ebenen die folgende:

Vorgehensweise:

1. Setze die Parametergleichung der einen Ebene in die Koordinatengleichung der zweiten Ebene koordinatenweise ein.
2. Löse das Gleichungssystem.
   Fall 1: keine Lösung: $E_1 \parallel E_2$
   Fall 2: wahre Aussage: $E_1 = E_2$
   Fall 3: Abhängigkeit zwischen den beiden Parametern: g_s existiert.
3. Die Schnittgerade erhält man durch Einsetzen der Abhängigkeit in die Parametergleichung der zugehörigen Ebene.

Beispiel 5 Gegeben sind die Ebene E_1: $x - 2y + 3z = 12$ und die Ebene

E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage beider Ebenen.

Einsetzen von E_2 in E_1:

$$(1 + 2r + 2s) - 2(-2 + r - s) + 3(-1 + r - 2s) = 12$$

Wir erhalten: $3r - 2s = 2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{3}{2}r - 1$

Also: g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{2}r - 1\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ergebns: g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$

Beispiel 6 Zeigen Sie, dass die Ebenen E: 2x - 5y + z = 11 und F: -4x + 10y - 2z = 3 parallel liegen.

In diesem Fall betrachten wir das Gleichungssystem aus den beiden Koordinatenformen. Wir addieren das Doppelte von E zu F und erhalten: $0 = 25$. Es gibt also keine Punkte, die in beiden Ebenen liegen. Damit gilt $E \parallel F$.

Beispiel 7 Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebene E: 2x + 4y + 3z = 5 mit der Parallelebene zur x-y-Ebene F: z = 5 .

Wir setzen z = 5 in E ein: $2x + 4y + 15 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = -2y - 5$

Nun wählen wir zwei Werte für y und erhalten somit zwei Punkte der Schnittgeraden:

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -5 \ \wedge \ z = 5; \qquad y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \ \wedge \ z = 5$

Wir erhalten daraus: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 8 Gegeben sind die Ebene E: $2x - y + z = 12$ und die Ebenenschar F_a durch die Punkte $A_a(a; 2; a+1)$, $B(1; 1; 4)$ und $C(3; 6; 4)$
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage beider Ebenen.

Wir stellen zunächst eine Parametergleichung für F_a auf.

$$F_a : \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ a-3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten nach einsetzen in E:

$$2(1 + r(a-1) + 2s) - 1 - r - 4s + 4 + r(a-3) = 12$$

Nach Vereinfachen erhält man:

$$3r(a-2) = 7$$

Wir erkennen einen ersten Sonderfall, wenn gilt $a = 2$. Es entsteht hier sofort eine falsche Aussage. Also liegt die Ebene F_2 parallel zu E.

In allen anderen Fällen gibt es eine Schnittgerade, die von a abhängt, da der Parameter r von a abhängt.

$$r = \frac{7}{3a-6}$$

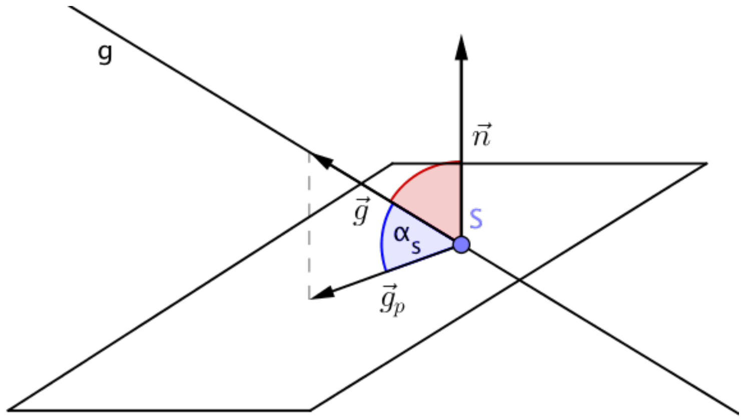
So entsteht als Schnittgerade:

$$g_s : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{10a-13}{3a-6} \\ \frac{3a+7}{3a-6} \\ \frac{19a-45}{3a-6} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6 Schnittwinkel

6.1 Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene

Die folgende Darstellung veranschaulicht den Schnitt einer Geraden g mit einer Ebene E. Wir erkennen, dass der Schnittwinkel α_S der Winkel zwischen der Geraden und ihrer senkrechten Projektion auf Ebene ist.



Da dieser Winkel sich jedoch mit dem spitzen Winkel $\sphericalangle(\vec{g}, \vec{n})$ zu 90° ergänzt, kann man diesen zur Berechnung nutzen.
Wir berechnen mit der Kosinusformel zunächst den spitzen Winkel $\sphericalangle(\vec{g}, \vec{n})$ zwischen der Geraden und einer Normalen zur Ebene E. Anschließend berechnen wir:

$$\alpha_s = \sphericalangle(g, E) = 90^\circ - \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n})$$

Beispiel 1 Bestimmen Sie den Winkel, unter dem die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ die x-z-Ebene durchstößt.

Winkel zwischen $\vec{g}$ und $\vec{n}$: $\cos \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{1}} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$

$$\sphericalangle(g, E) = 90^\circ - \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = 90^\circ - 43,31^\circ = 46,69^\circ$$

Beispiel 2 Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel zwischen der Ebene E: $2x - y - z = 18$ und der Geraden g durch die Punkte $A(3;1;1)$ und $B(4;-3;0)$

Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wir setzen in E ein: $2(3+t) - (1-4t) - (1-t) = 18 \quad \Rightarrow \quad t = 2$

Schnittpunkt: $S(5;-7;-1)$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\vec{g}$ und $\vec{n}$: $\cos \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}} = \dfrac{7}{6\sqrt{3}}$

$\sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = 47,65^\circ$

Winkel zwischen g und E: $\sphericalangle(g, E) = 90^\circ - \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n}) = 42,35^\circ$

Zu einer etwas eleganteren Möglichkeit der Winkelberechnung kommt man durch das Ausnutzen trigonometrischer Beziehungen. Zwischen dem Sinus und dem Kosinus eines Winkels gilt die Beziehung: $\sin x = \cos(90^\circ - x)$. Wendet man das auf unsere beiden Winkel an, so erhält man:

$$\sin \sphericalangle(g, E) = \cos \sphericalangle(\vec{g}, \vec{n})$$

Da wir auch hier als Schnittwinkel nur maximal rechte Winkel zulassen wollen, ergibt sich somit folgende Formel zur Berechnung der **Schnittwinkels zwischen einer Geraden g und einer Ebene E**:

$$\sin \sphericalangle(g, E) = \frac{|\vec{g} \circ \vec{n}_E|}{|\vec{g}| \cdot |\vec{n}_E|}$$

Für unser Beispiel folgt: $\sin \sphericalangle(g, E) = \dfrac{7}{6\sqrt{3}}$

Winkel zwischen g und E: $\sphericalangle(g, E) = 42,35^\circ$

6.2 Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$. Auch hier wollen wir maximal einen rechten Winkel zulassen. Also verwenden wir im Zähler der Kosinusformel - wie schon beim Schnittwinkel zwischen Geraden - wieder den Betrag des Skalarproduktes. Wir erhalten:

$$\cos\sphericalangle(E_1, E_2) = \cos\sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Beispiel 3 Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E: $x - 3y + 2z = -4$ und F: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Einsetzen F in E:

$$2 + u - 2v - 3(3 + 2u + v) + 2(-1 + u + 3v) = -4$$

führt auf: $v = 3u + 5$

Damit ergibt sich für die Schnittgerade:

$$g_S: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittwinkel benötigen wir noch einen Normalenvektor der Ebene F:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Schnittwinkel gilt dann:

$$\cos\sphericalangle(E, F) = \cos\sphericalangle(\vec{n}_E, \vec{n}_F) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}}$$

Damit ist dann $\sphericalangle(E, F) = 22,21^\circ$.

7 Berechnung von Abständen im euklidischen Raum

7.1 Abstand zwischen zwei Punkten

Als **Abstand** zwischen zwei Objekten bezeichnet man die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten, die zu diesen Objekten gehören. Damit könnte man Abstandsaufgaben als Extremwertaufgaben auffassen. Wir werden jedoch sehen, dass man Abstände oft auch dadurch bestimmt, dass man einfach ein geeignetes Lot fällt und dann den Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt des Lotes berechnet. Zunächst halten wir fest:

Def 7.1

Gegeben seien zwei Punkte $P(x_P; y_P; z_P)$ und $Q(x_Q; y_Q; z_Q)$. Dann nennen wir

$$a(P,Q) := |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

***Abstand** zwischen P und Q.*

Beispiel 1 Bestimmen Sie den Abstand zwischen den Punkten A(a; a+1; 4) und B(2; 5; 2). Untersuchen Sie, für welchen Wert von a der Abstand $\sqrt{14}$ beträgt.

$$a(A,B) := |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-a)^2 + (4-a)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2a^2 - 12a + 24}$$

Ansatz: $\sqrt{2a^2 - 12a + 24} = \sqrt{14}$

Wir erhalten: $a^2 - 6a + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 \ \wedge \ a_2 = 5$

Bemerkung:
Diesen Abstand nennt man auch euklidischen Abstand, weil er unserer Vorstellung von einer „direkten Entfernung“ entspricht. Mathematisch gesehen kann man Abstände auch anders definieren. So gibt es beispielsweise eine sogenannte **Manhattan-Norm**. Sie ist folgendermaßen definiert:

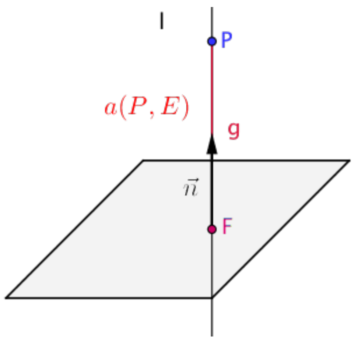
$$a(P,Q) := |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P| + |z_Q - z_P|$$

Sie macht dann „Sinn“, wenn man sich nur parallel zu den Koordinatenachsen von P nach Q „bewegen“ darf.

7.2 Abstand Punkt - Ebene

Veranschaulichen wir uns zunächst einmal das Problem in einer geeigneten Skizze.

Der Abstand von P zu E ist die kürzeste Entfernung. Diese erhält man, wenn man das Lot von P auf E fällt und den Abstand $a(P, F)$ zwischen P und dem Lotfußpunkt auf E bestimmt. Es ergibt sich somit eine naheliegende Vorgehensweise zur Berechnung des gesuchten Abstandes.



Vorgehensweise: Lotfußpunktverfahren:

1. Aufstellen einer Lotgeraden l zu E durch P: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{n}$
2. Ermittlung des Schnittpunktes F durch Einsetzen von l in E.
3. Berechnung des Abstandes: $a(P, E) = |\overrightarrow{PF}|$

Beispiel 2 Bestimmen Sie des Punktes P(3; -10; 4) von der Ebene E: 2x + y -2z = 6.

Lotgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Schnitt mit E: $2(3 + 2r) + (-10 + r) - 2(4 - 2r) = 6$

Wir erhalten nach Vereinfachung: $r = 2 \quad \Rightarrow \quad F(7; -8; 0)$

Damit ist: $a(P; E) = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 6\ LE$

Bemerkung:
Das Lotfußpunktverfahren ist ein sehr anschauliches Verfahren zur Abstandsbestimmung. Es geht schnell, wenn die Ebene bereits in Koordinatenform vorliegt. Falls das nicht der Fall ist, muss man diese Form erst noch herstellen.
Zudem hat das Verfahren den Vorteil, dass man als Zwischenergebnis den Punkt F erhält. Dieser ist beispielsweise dann nützlich, wenn man den Punkt P' bei **Spiegelung** von P an E bestimmen soll. Man überzeugt sich leicht, dass dann gilt:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$

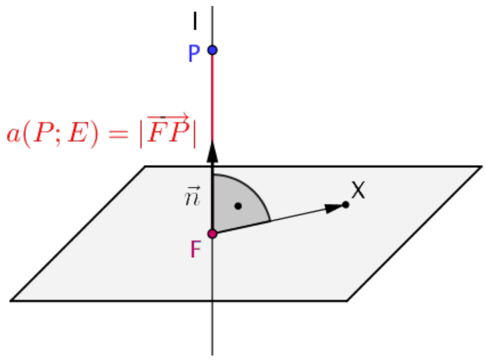
Herleitung einer Formel für den Abstand:

Im Bild sehen wir zwei sehr entscheidende Gegebenheiten.
Es gilt für jeden Punkt X der Ebene:
$\overrightarrow{FP} \perp \overrightarrow{FX}$
Damit folgt:

$$\overrightarrow{FP} \circ \overrightarrow{FX} = 0$$

Außerdem ist $\overrightarrow{FP} \parallel \vec{n}$. Folglich gilt:

$$\frac{\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FP}|} = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$



Zur Herleitung gehen wir von einer Vektorgleichung aus, die man im Bild nachvollziehen kann:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XF} + \overrightarrow{FP} && \text{Umstellen nach } \overrightarrow{FP} \\
\overrightarrow{FP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{XF} && \text{Multiplizieren mit } \overrightarrow{FP} \\
\overrightarrow{FP}^2 &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{XF}) \circ \overrightarrow{FP} && \text{Ausmultiplizieren} \\
\overrightarrow{FP}^2 &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}) \circ \overrightarrow{FP} - \overrightarrow{XF} \circ \overrightarrow{FP} && \overrightarrow{XF} \circ \overrightarrow{FP} = 0 \\
\overrightarrow{FP}^2 &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}) \circ \overrightarrow{FP} && \text{Verwenden: } \overrightarrow{FP}^2 = |\overrightarrow{FP}^2| \\
|\overrightarrow{FP}^2| &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}) \circ \overrightarrow{FP} && \text{Division durch } |\overrightarrow{FP}| \\
|\overrightarrow{FP}| &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}) \circ \frac{\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FP}|} && \text{Ersetzen: } \frac{\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FP}|} = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \\
|\overrightarrow{FP}| &= \pm\,(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}) \circ \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} && \text{Umformen} \\
|\overrightarrow{FP}| &= \frac{|\overrightarrow{OP} \circ \vec{n} - \overrightarrow{OX} \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|} && \text{Nutze: } \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{OX} \circ \vec{n} = d \\
|\overrightarrow{FP}| &= \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
\end{aligned}
$$

Wir fassen zusammen:

Satz 7.1

Gegeben sei eine Ebene E: $ax + by + cz = d$ und ein Punkt $P(x_P; y_P; z_P)$. Dann gilt für den Abstand des Punktes P von E:

$$a(P, E) = \frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Beispiel 3 Zeigen Sie das die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene E: 3x + y - 2z = 11 liegt und bestimmen Sie den Abstand.

Wir setzen g in E ein: $3(5+r) + (-1-r) - 2(7+r) = 11$

Wir erhalten: $0 = 11 \quad \Rightarrow \quad g \parallel E$

Für den Abstand setzen wir den Stützvektor von g in die Abstandsformel ein, denn jeder Punkt von g hat denselben Abstand zur Ebene.

$$a(g;E) = \frac{|3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 - 11|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{14}\sqrt{14}$$

Beispiel 4 Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E: 2x - 5y + z = -9 und F: -2x + 5y -z = 2 voneinander.

Man erkennt sofort, dass beide Ebenen parallel liegen, denn ihre Normalenvektoren sind kollinear und die Werte für d verschieden. Den Abstand bestimmen Wir indem wir einen Punkt von F in die Abstandsformel zu E einsetzen.

Ein Punkt von F ist: $P(-1;0;0)$.

Wir erhalten:

$$a(F;E) = \frac{|2 \cdot -1 - 5 \cdot 0 + 0 + 9|}{\sqrt{30}} = \frac{7}{30}\sqrt{30}$$

Bemerkung:

1. Wie wir in den letzten beiden Beispielen gesehen haben, lassen sich die Abstände von einer parallelen Geraden, beziehungsweise einer parallelen Ebene zu einer Ebene auf den Abstand eines Punktes von der Ebene zurückführen.

2. Erhält man innerhalb der Abstandsformel im Zähler verschiedene Vorzeichen für zwei Punkte, so liegen die zugehörigen Punkte auf verschiedenen Seiten bezüglich der Ebene. Das Vorzeichen entsteht nämlich dadurch, dass der Vektor$\overrightarrow{FP}$ entweder gleich oder entgegengesetzt zu $\vec{n}$ orientiert ist.

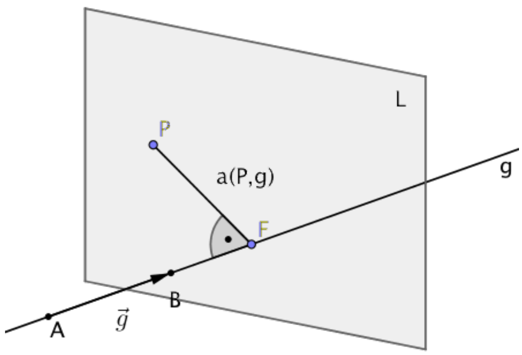
3. Liegt P auf E, so erhält man für den Abstand 0.

7.3 Abstand Punkt - Gerade

Zur Bestimmung des Abstandes zwischen einem Punkt P und einer Geraden g werden wir verschiedene Verfahren kennenlernen. Jedes von ihnen hat gewisse Vor- und Nachteile. Um diese besser vergleichen zu können, werden wir jeweils dasselbe Beispiel mit den verschiedenen Methoden behandeln.

7.3.1 Nutzung einer Lotebene

Um den Abstand des Punktes P zu g zu bestimmen, legen wir eine Ebene L so durch den Punkt, dass sie die Gerade g senkrecht schneidet. Dies ist genau dann der Fall, wenn wir $\vec{g}$ als Normalenvektor dieser Ebene verwenden. F ist dann der Schnittpunkt von g mit L und $\overline{PF}$ der gesuchte Abstand von P zu g.



Wir leiten folgende Vorgehensweise zur Abstandsbestimmung ab.
Vorgehensweise:

1. Aufstellen der Lotebene L: $\overrightarrow{OX} \circ \vec{g} = \overrightarrow{OP} \circ \vec{g}$ in Koordinatenform.
2. Bestimmung des Schnittpunktes F zwischen L und g.
3. Berechnen des Abstandes $a(P;g) = |\overrightarrow{FP}|$

Beispiel 5 Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2;7;-1)$ von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lotebene L: $x - 2y + 2z = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -14$

Rechnung: $5 + r - 2(3 - 2r) + 2(1 + 2r) = -14 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{3}$

ggf. Schnittpunkt: $F\left(\frac{10}{3}; \frac{19}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

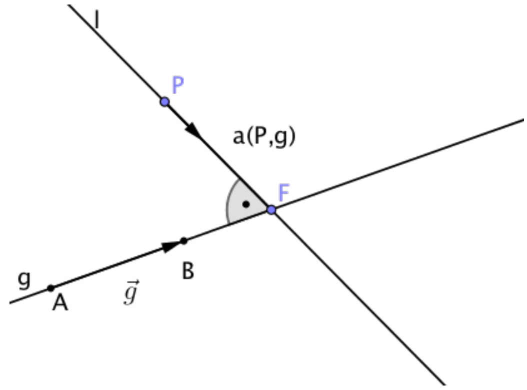
Abstand: $a(P;g) = |\overrightarrow{FP}| = \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3}\sqrt{36} = 2$

7.3.2 Lotfußpunktverfahren

Um den Abstand des Punktes P zu g zu bestimmen, suchen wir den Punkt F auf g, für den gilt:

$$\vec{g} \circ \overrightarrow{PF} = 0.$$

Wir nutzen aus, dass F auf g liegt, also die Geradengleichung zu g erfüllt. Mit Hilfe des errechneten Parameters bestimmen wir F und den gesuchten Abstand.



Wir leiten folgende Vorgehensweise zur Abstandsbestimmung ab.
Vorgehensweise:

1. Ansatz: $\overrightarrow{PF} \circ \vec{g} = (\overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{g} - \overrightarrow{OP}) \circ \vec{g} = 0$
2. Bestimmung des Schnittpunktes F zwischen l und g.
3. Berechnen des Abstandes $a(P; g) = |\overrightarrow{FP}|$

Beispiel 6 Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2; 7; -1)$ von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ über das Lotfußpunktverfahren.

Ansatz Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 3 + r \\ -4 - 2r \\ 2 + 2r \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

Berechnung: $9r + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{5}{3}$

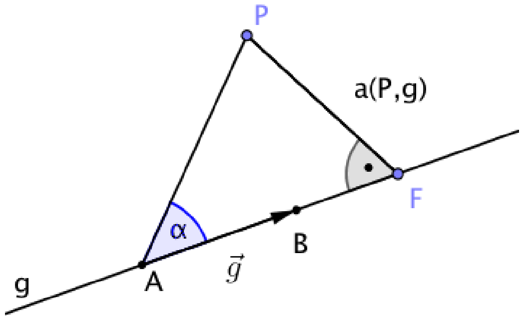
ggf. Schnittpunkt: $F\left(\frac{10}{3}; \frac{19}{3}; -\frac{7}{3}\right)$

Abstand: $a(P; g) = |\overrightarrow{FP}| = 2$

Bemerkung:
Die beiden bisher vorgestellten Verfahren ermitteln den Lotfußpunkt F, den man auch zur Berechnung des Bildpunktes P' verwenden kann, der bei Spiegelung von P an g entsteht.

7.3.3 Nutzung trigonometrischer Überlegungen

Um den Abstand des Punktes P zu g zu bestimmen, nutzen wir das bei F rechtwinklige Dreieck AFP. Da $\vec{g}$ und $\overrightarrow{AP}$ bekannt sind, kann man über den Sinus des Winkels α den gesuchten Abstand berechnen. Es gilt:



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{g} \circ |\overrightarrow{AP}|}{|\vec{g}| \cdot |\overrightarrow{AP}|}$$

Weiterhin ist dann: $a(P,g) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin\alpha$. Somit ergibt sich die folgende

Vorgehensweise:

1. Berechne α aus $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{g} \circ \overrightarrow{AP}|}{|\vec{g}| \cdot |\overrightarrow{AP}|}$.
2. Berechne $a(P,g) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \sin\alpha$

Beispiel 7 Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2;7;-1)$ von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. über trigonometrische Formeln.

Vorbereitung: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{29}$

Winkelberechnung:

$$\cos\alpha = \frac{|(-3)\cdot 1 + 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 2|}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 21.8^\circ$$

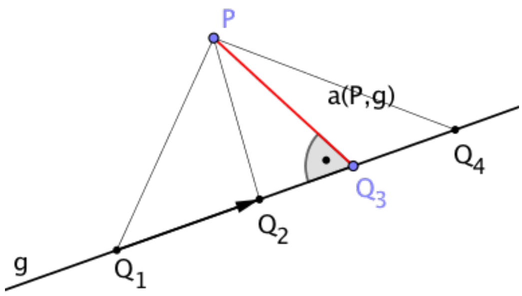
Abstand: $a(P;g) = \sqrt{29} \cdot \sin 21,8^\circ = 2$

Bemerkung:

Dieses Verfahren ermittelt den Punkt F nicht. Außerdem wird durch die Berechnung der Winkel über die Winkelfunktionen der Abstand nur näherungsweise bestimmt. Wenn man ihn exakt bestimmen möchte, muss man zusätzlich noch die Beziehung $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ benutzen, um damit aus dem exakten Kosinuswert den exakten Sinuswert zu gewinnen.

7.3.4 Abstand als Extremwertaufgabe

Wenn sich ein Punkt Q auf der Gerade bewegt, kann man immer den Abstand zu P berechnen. Wir suchen unter all diesen Abständen den minimalen. Dazu müssen wir zunächst den Abstand allgemein als Funktion darstellen. Diese Funktion untersuchen wir dann auf ein globales Minimum.



Vorgehensweise:

1. Ansatz für Zielfunktion: $a(x_Q, y_Q, z_Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$.
2. Gerade g koordinatenweise für Q einsetzen. Es entsteht eine Ziefunktion in Abhängigkeit vom Parameter r.
3. Zielfunktion auf Extrema untersuchen.
4. Minimalen Abstand durch Einsetzen von r berechnen.

Beispiel 8 Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2; 7; -1)$ von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. über eine Extremwertaufgabe.

Hauptbedingung: $a(x_Q, y_Q, z_Q) = \sqrt{(x_Q - 2)^2 + (y_Q - 7)^2 + (z_Q + 1)^2}$

Nebenbedingungen: $x_Q = 5 + r \;\wedge\; y_Q = 3 - 2r \;\wedge\; z_Q = 1 + 2r$

Zielfunktion:
$a(r) = \sqrt{(3 + r)^2 + (-4 - 2r)^2 + (2 + 2r)^2} = \sqrt{9r^2 + 30r + 29}$

Eine Wurzel wird dann minimal, wenn ihr Radikand positiv und minimal ist. Daher untersuchen wir nur die quadratische Funktion unter der Wurzel.

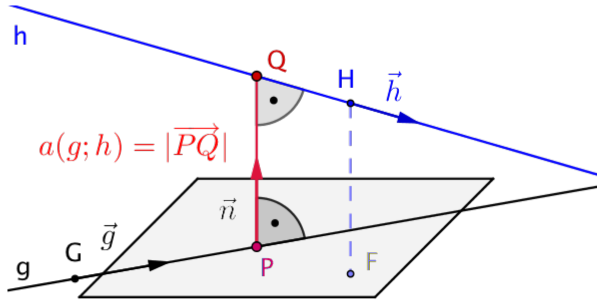
Ableitung: $f'(r) = 18r + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\dfrac{5}{3}$

Nachweis: $f''(r) = 18 > 0 \quad \Rightarrow$ lokales Minimum für $r = -\dfrac{5}{3}$

Abstand: $a\left(-\frac{5}{3}\right) = \sqrt{9 \cdot \frac{25}{9} - 30 \cdot \frac{5}{3} + 29} = \sqrt{4} = 2$

7.4 Abstand windschiefer Geraden

Wenn zwei Geraden g und h im Raum so liegen, dann ist der Abstand auch hier die kürzeste Verbindung zwischen ihnen. Diese entsteht genau dann, wenn die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ senkrecht auf beiden Geraden steht.



Wenn wir eine zu h parallele Ebene durch g legen und von H das Lot auf diese Ebene fällen, erhalten wir denselben Abstand: $\overline{PQ} = \overline{HF}$. Daraus ergibt sich eine erste Möglichkeit zur Bestimmung des Abstandes. Anhand der folgenden Vorgehensweise entwickeln wir gleich eine Formel zur Berechnung.

Vorgehensweise:

1. Berechne den Vektor $\vec{n} = \vec{g} \times \vec{h}$
2. Wir stellen die Ebenengleichung für die Ebene in Punkt-Normalenform auf, die g enthält und parallel zu h liegt.

$$E : \frac{(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OG}) \circ \vec{n}}{|\vec{n}|} = 0$$

3. Wir bestimmen den Abstand von H zur Ebene E. Es ist der gesuchte Abstand.

$$a(H, E) = a(g, h) = \frac{|(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG}) \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Wenn man eine fertige Gleichung nur aus den gegebenen Geraden g und h für den Abstand haben möchte, so kann man $\vec{n} = \vec{g} \times \vec{h}$ benutzen und erhält:

Satz 7.2

Gegeben seien zwei windschiefe Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OG} + r \cdot \vec{g}$ und h: $\vec{x} = \overrightarrow{OH} + s \cdot \vec{h}$. Dann gilt für den Abstand zwischen g und h:

$$a(g, h) = \frac{|(\overrightarrow{GH}) \circ (\vec{g} \times \vec{h})|}{|\vec{g} \times \vec{h}|}$$

Bemerkung:
Mit Hilfe dieses Verfahrens erhält man zwar den Abstand zwischen den beiden Geraden, nicht aber die Lage der Punkte P und Q, von denen aus der Abstand gemessen werden könnte. Eine zweite Vorgehensweise, die auch diese beiden Punkte ermittelt, wird später vorgestellt.

Beispiel 9 Berechnen Sie den Abstand der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h:$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ voneinander.

Zunächst untersuchen wir die Lage der Geraden:
Die Richtungsvektoren sind nicht kollinear, denn $\vec{h} \neq t \cdot \vec{g}$.

Schnitt $g \cap h$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die ersten beiden Gleichungen liefern als Lösung: $r = \frac{16}{7} \ \wedge \ s = -\frac{20}{7}$.
Die Probe mit der dritten ergibt: $\frac{39}{7} = -\frac{93}{7}$, also eine falsche Aussage.
g und h liegen windschief. zueinander.

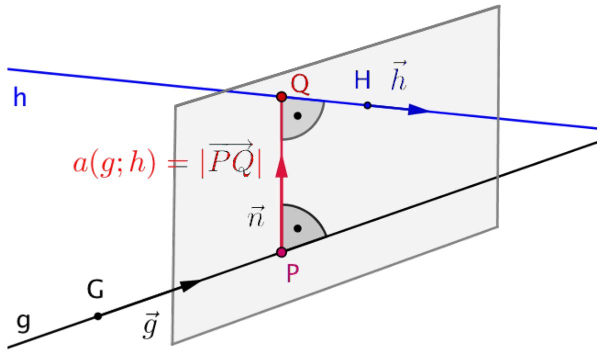
Abstand: $$a(g,h) = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \circ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}$$

Wir erhalten: $$a(g,h) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -17 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -17 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right|} = \frac{140}{339}\sqrt{339} \approx 7,60 \ LE$$

Beispiel 10: Gegeben sind g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Abstand.

$$a(g,h) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0}{1} = 0 \ LE \quad \Rightarrow \quad g \cap h = \{S\}$$

Ein zweites Verfahren soll nun auch die Punkte P und Q mit liefern, zwischen denen der Abstand der Geraden gemessen werden kann. Dazu legen wir eine Ebene so durch g, dass sie h senkrecht schneidet. Das ist genau dann der Fall, wenn man als zweiten Spannvektor für sie den Vektor $\vec{g} \times \vec{h}$ verwendet.



Vorgehensweise:

1. Aufstellen der Ebene E mit $g \in E \;\wedge\; h \perp E$:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OG} + r\vec{g} + t(\vec{g} \times \vec{h})$$

2. Wir schneiden E mit h und erhalten Parameterwerte: r, s und t:

$$E \cap h: \quad \overrightarrow{OG} + r \cdot \vec{g} + t \cdot (\vec{g} \times \vec{h}) = \overrightarrow{OH} + s \cdot \vec{h}$$

3. Berechnen von P und Q durch Einsetzen von r in g und s in h.
4. Berechnen von $a(g,h) = |PQ|$.

Beispiel 11 Berechnen Sie den Abstand der Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ voneinander.

Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit: $\vec{g} \times \vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnitt mit h liefert:

$$\begin{aligned} r - 2s - 2t &= 3 \\ -s + 3t &= -4 \\ 2r - s + t &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5}{7};\; s = \frac{1}{7};\; t = -\frac{9}{7}$$

Punkte: $P\left(-\frac{9}{7}; 1; \frac{17}{7}\right)$ $Q\left(\frac{9}{7}; -\frac{20}{7}; \frac{8}{7}\right)$ Abstand: $a(g,h) = \frac{9}{7}\sqrt{14}$